Classe de Première S_1 ***Jeudi 6 janvier 2000***

Devoir de mathématiques N°12

Exercice 1) (8 points)

Soit *ABC* un triangle tel que *AB* = 3, *AC* = 5, $\hat{A} = \dfrac{2\pi}{3}$

a) Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice.
b) Calculer *BC*, le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, et le rayon *R* du cercle circonscrit à *AB*C.
c) Montrer que $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{33}{2}$
d) Déterminer le barycentre *G* de (*A*, 1), (*B*,-1), (*C*, 1), montrer que *ABCG* est un parallélogramme.
e) Calculer *BG* (on pourra écrire $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$)
f) Montrer que, pour tout point M du plan on a $MA^2 - MB^2 + MC^2 = MG^2 - 33$
g) En déduire l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 16$

Exercice 2) (6 points)

Les deux questions sont indépendantes

1) *ABCD* est un quadrilatère convexe (c'est à dire que ses diagonales sont à l'intérieur), et *O* est le point d'intersection des diagonales.

a) Montrer que les angles $A\hat{O}B, B\hat{O}C, C\hat{O}D, D\hat{O}A$ ont le même sinus noté $\sin\alpha$.
b) Exprimer l'aire du triangle *OAB* à l'aide de $\sin\alpha$.
c) En déduire que l'aire de *ABCD* vaut $\dfrac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha$.

2) *ABC* est un triangle, on notera *AB* = *c*, *AC* = *b* et *BC* = *a*. *R* est le rayon du cercle circonscrit, *r* est le rayon du cercle inscrit.

a) Calculer l'aire des triangles *KAB*, *KAC* et *KBC* à l'aide de *r* et des longueurs *a*, *b*, *c*.
b) En déduire que l'aire de ABC vaut $\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$
c) En déduire que dans tout triangle $\dfrac{abc}{a+b+c} = 2Rr$

Exercice 3) (6 points)

1) A et B sont deux points du plan, I est le milieu de [AB]. Montrer que, pour tout point M du plan, on a $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$ (on pourra écrire $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$).
2) En déduire, si G est le centre de gravité d'un triangle ABC, que $GC^2 = \dfrac{2}{9}(CA^2 + CB^2 - \dfrac{AB^2}{2})$.
3) En déduire que $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \dfrac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + BC^2)$