Classe de première S_7 — ***Lundi 14 octobre 2002***

Devoir de mathématiques

N°4

Exercice 1) (6 points)

A, *B* et *C* sont trois points tels que $AB = 5$, $AC = 8$.

1) Est-il possible d'avoir $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 60$? On prend maintenant $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 20$.
2) Quelle est la valeur de $\widehat{BAC}$?
3) Calculer *BC*.
4) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB}$
5) Quelle est l'aire du triangle *ABC* ?
6) *G* est le centre de gravité de *ABC*. Calculer *AG*.
7) Faire une figure.

Exercice 2) (6 points)

1) $\mathscr{C}$ est un cercle de centre *O* et de rayon *R*, *A* est un point extérieur à $\mathscr{C}$. On mène par *A* une tangente à $\mathscr{C}$ et on appelle *T* son point de contact avec $\mathscr{C}$. Justifier que $AT^2 = OA^2 - R^2$.
2) Une droite passant par *A* coupe $\mathscr{C}$ en deux points *P* et *Q*. On appelle *I* le milieu de [*PQ*]. Montrer que $\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{AQ} = AI^2 - IP^2$.
3) On appelle *P'* le point diamétralement opposé à *P*. Montrer que $\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{AP'}$.
4) Déduire d'une des questions précédentes que $\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{AQ} = OA^2 - R^2$
5) Le résultat précédent est il encore valable si *A* est à l'intérieur de $\mathscr{C}$?
6) Enoncez un théorème résumant cet exercice.

Exercice 3) (4 points)

Faire l'exercice 73 page 353

Exercice 4) (4 points)

ABC est un triangle. Un point *M* du plan se projette en *I* sur (*AB*), en *J* sur (*AC*), en *K* sur (BC). On recherche le point *M* tel que $AI^2 + BK^2 + CJ^2$ soit minimal.

a) Montrer que $AI^2 + BK^2 + CJ^2 = AJ^2 + BI^2 + CK^2$.
b) On appelle *C'* le milieu de [*AB*]. Montrer que $AI^2 + BI^2 = 2IC'^2 + \dfrac{AB^2}{2}$. Ecrire des égalités similaires pour $BK^2 + CK^2$, $AJ^2 + CJ^2$.
c) En déduire une expression de la somme $AI^2 + BK^2 + CJ^2 + AJ^2 + BI^2 + CK^2$
d) Conclure