Classe de 1ère S5

Correction du DS n°6

Exercice 1)

1) Un triangle rectangle a pour aire 5 et pour périmètre 12. Appelons x et y les côtés de l'angle droit. On a $\frac{xy}{2}=5$ et $\sqrt{x^2+y^2}+x+y=12$. On obtient : $\begin{cases} xy=10 \\ x+y+\sqrt{x^2+y^2}=12 \end{cases}$.

   Résolvons ce système par substitution : il est équivalent à

   $$\begin{cases} y=\frac{10}{x} \\ x+\frac{10}{x}+\sqrt{x^2+\frac{100}{x^2}}=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{10}{x} \\ \sqrt{x^2+\frac{100}{x^2}}=12-\left(x+\frac{10}{x}\right) \end{cases}$$

   La deuxième équation est successivement équivalente à :

   $$x^2+\frac{100}{x^2}=\left[12-\left(x+\frac{10}{x}\right)\right]^2 \text{ avec } \left[12-\left(x+\frac{10}{x}\right)\right]\geq 0$$

   $$x^2+\frac{100}{x^2}=144-24\left(x+\frac{10}{x}\right)+\left(x+\frac{10}{x}\right)^2 \text{ avec } \left[12-\left(x+\frac{10}{x}\right)\right]\geq 0$$

   $$x^2+\frac{100}{x^2}=144-24\left(x+\frac{10}{x}\right)+x^2+20+\frac{100}{x^2} \text{ avec } \left[12-\left(x+\frac{10}{x}\right)\right]\geq 0$$

   $$0=164-24x-\frac{240}{x} \text{ avec } \left[12-\left(x+\frac{10}{x}\right)\right]\geq 0$$

   $$\frac{24x^2-164x+240}{x}=0 \text{ avec } \left[12-\left(x+\frac{10}{x}\right)\right]\geq 0$$

   $$6\text{x}^2-41x+60=0 \text{ avec } \left[12-\left(x+\frac{10}{x}\right)\right]\geq 0$$

On peut déjà remarquer que le produit des solutions de cette dernière équation vaut 10, que leur somme vaut $\frac{41}{6}$ qui est inférieur à 12. Ainsi les deux solutions de cette équation seront positives et vérifieront bien $\left[12-\left(x+\frac{10}{x}\right)\right]\geq 0$, et quand x sera égal à une des solutions, $y=\frac{10}{x}$ sera égal à l'autre. Si on résout la dernière équation, on obtient $\Delta=41^2-4\times 6\times 60=1681-1440=241$, donc les côtés de l'angle droit du triangle valent respectivement $\frac{41+\sqrt{241}}{12}$ et $\frac{41-\sqrt{241}}{12}$, tandis que l'hypoténuse est égale à :

$$\sqrt{\left(\frac{41+\sqrt{241}}{12}\right)^2+\left(\frac{41-\sqrt{241}}{12}\right)^2}=\frac{\sqrt{2880}}{12}=2\sqrt{5}$$

2) $x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2-\frac{3}{2}x-1=0$. Le discriminant de cette équation vaut $\frac{9}{4}+4=\frac{25}{4}$, ses deux solutions sont 2 et $-\frac{1}{2}$.

Dans $4\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-12\left(x-\frac{1}{x}\right)+9=0$, posons $X=x-\frac{1}{x}$. On obtient $4X^2-12X+9=0$, le discriminant de cette équation est égal à 0, elle a pou racine double $X=\frac{3}{2}$, si on revient à x on obtient l'équation qui a été résolue précédemment, ses solutions sont donc 2 et $-\frac{1}{2}$.

Exercice 2)

Dans le tableau, prenons les centres des classes pour calculer la moyenne et l'écart type:

Temps en mn	[0 ; 5[	[5 ; 15[	[15 ; 30[	[30 ; 45[	[45 ; 60[	[60 ; 90[
Centres	2,5	10	22,5	37,5	52,5	75
Effectifs	5	15	25	20	15	20

On obtient à la calculatrice une moyenne de 37,625, et un écart type proche de 23,365.
Pour la médiane et les quartiles, il faut construire le tableau des effectifs cumulés :

Temps en mn	0	5	15	30	45	60	90
Effectifs cumulés croissants	0	5	20	45	65	80	100

La médiane correspond à un effectif cumulé croissant de 50, elle est donc dans l'intervalle [30 ; 45], à $\frac{5}{20}$ à partir de 30. On a donc $m=30+\frac{5}{20}\times 15=33,75$.

De même $q_1=15+\frac{5}{25}\times 15=18$ et $q_3=45+\frac{10}{15}\times 15=55$

Dernière question : l'intervalle $[\overline{x}-s;\overline{x}+s]$ correspond environ à [14,26 ; 60,99].

De 14,26 et 15, il y a 0,74 sur une longueur de 10 entre 5 et 15. L'effectif entre 14,26 et 15 est donc de $\frac{0,74}{10}\times 15\approx 1,1$ élève. De même, de 60 à 60,99 il y a environ $\frac{0,99}{30}\times 20\approx 0,6$ élève. De 15 à 60, il y a en tout 60 élèves. On peut donc estimer à 61,7% le pourcentage d'élèves dans l'intervalle $[\overline{x}-s;\overline{x}+s]$.

Exercice 3

1) Si le groupe 1 a un effectif de n_1 et le groupe 2 un effectif de n_2, l'ensemble a un effectif n égal à n_1+n_2.

De plus, on a $\overline{x_1}=\frac{\sum_{groupe1} n_i x_i}{n_1}$ et $\overline{x_2}=\frac{\sum_{groupe2} n_i x_i}{n_2}$ donc $\sum_{groupe1} n_i x_i = n_1\overline{x_1}$ et $\sum_{groupe2} n_i x_i = n_2\overline{x_2}$.

Comme d'autre part $\sum_{total} n_i x_i = \sum_{groupe1} n_i x_i + \sum_{groupe2} n_i x_i = n_1\overline{x_1}+n_2\overline{x_2}$, on trouve bien que $\overline{x}=\frac{\sum_{total} n_i x_i}{n}=\frac{n_1\overline{x_1}+n_2\overline{x_2}}{n_1+n_2}$

2) Si on développe :

$$\frac{n_1}{n}(\overline{x_1}-\overline{x})^2+\frac{n_2}{n}(\overline{x_2}-\overline{x})^2=\frac{n_1}{n}(\overline{x_1}^2-2\overline{x_1}\,\overline{x}+\overline{x}^2)+\frac{n_2}{n}(\overline{x_2}^2-2\overline{x_2}\,\overline{x}+\overline{x}^2)$$

$$=\frac{n_1}{n}\overline{x_1}^2+\frac{n_2}{n}\overline{x_2}^2+\left(\frac{n_1}{n}+\frac{n_2}{n}\right)\overline{x}^2-2\overline{x}\left(\frac{n_1}{n}\overline{x_1}+\frac{n_2}{n}\overline{x_2}\right)$$

$$=\frac{n_1}{n}\overline{x_1}^2+\frac{n_2}{n}\overline{x_2}+\left(\frac{n_1+n_2}{n}\right)\overline{x}^2-2\overline{x}\,\frac{n_1\overline{x_1}+n_2\overline{x_1}}{n}$$

$$=\frac{n_1}{n}\overline{x_1}^2+\frac{n_2}{n}\overline{x_2}+\overline{x}^2-2\overline{x}^2 \text{ d'après le 1)}$$

$$=\frac{n_1}{n}\overline{x_1}^2+\frac{n_2}{n}\overline{x_2}-\overline{x}^2$$

3) D'après les formules du cours, on a $v_1=\dfrac{\sum_{groupe1} n_i x_i^2}{n_1}-\overline{x_1}^2$ donc $\sum_{groupe1} n_i x_i^2 = n_1 v_1 + n_1\overline{x_1}^2$.

De même, $\sum_{groupe2} n_i x_i^2 = n_2 v_2 + n_2\overline{x_2}^2$ donc

$$\sum_{total} n_i x_i^2 = \sum_{groupe1} n_i x_i^2 + \sum_{groupe2} n_i x_i^2 = n_1 v_1 + n_1\overline{x_1}^2 + n_2 v_2 + n_2\overline{x_2}^2$$

et $v=\dfrac{\sum_{total} n_i x_i^2}{n}-\overline{x}^2=\dfrac{1}{n}(n_1 v_1 + n_1\overline{x_1}^2 + n_2 v_2 + n_2\overline{x_2}^2)-\overline{x}^2$

$$=\frac{n_1}{n}v_1+\frac{n_2}{n}v_2+\frac{n_1}{n}\overline{x_1}^2+\frac{n_2}{n}\overline{x_2}^2-\overline{x}^2$$

On obtient le résultat demandé compte tenu de ce qui a été démontré au dessus.

4) Il s'agissait d'appliquer les résultats précédents à un cas particulier.

On a ici $n_1=40, \overline{x_1}=11{,}3, v_1=s_1^2=1{,}1^2=1{,}21$ et $n_2=60, \overline{x_2}=10{,}8, v_2=s_2^2=1{,}3^2=1{,}69$

On obtient une moyenne générale $\overline{x}=\dfrac{40\times 11{,}3+60\times 10{,}8}{100}=11$, et une variance générale de $v=\dfrac{40}{100}\times 1{,}21+\dfrac{60}{100}\times 1{,}69+\dfrac{40}{100}(11{,}3-11)^2+\dfrac{60}{100}(10{,}8-11)^2=1{,}558$

donc un écart type $s=\sqrt{1{,}558}\approx 1{,}25$

Exercice 4

b) Si on augmentait chaque note de 2 points, on ferait une transformation affine $x\to x+2$, le minimum, le maximum la moyenne, la médiane et les quartiles augmenteraient de 2, mais l'écart type resterait inchangé, ainsi que l'étendue et l'écart interquartile.

c) Si on augmentait chaque note de 20%, on ferait la transformation $x\to 1{,}2x$, cette fois tous les paramètres subiraient cette transformation.

d) Si on augmentait les cinquante plus faibles de 1 point, on augmenterait la somme totale de 50 points, donc la moyenne augmenterait de 50/250 = 0,2 point.

Comme le premier quartile correspond à un effectif cumulé de 250/4 = 62.5, augmenter les 50 plus faibles ne change pas le premier quartile s'il y a au moins 50 notes strictement inférieures à 4, et le fait passer à 5 si ce n'est pas le cas.

La médiane (effectif cumulé 125) et le troisième quartile ne changent pas.

Pour l'écart type, on ne peut rien dire.

e) Les transformations du b) et du c) ne changent pas la forme de la série, elles changent juste sa taille et sa place. La série centrée réduite associée ne change donc pas.