Classe de première S_2 **Jeudi 14 Mai 1998**

Devoir de mathématiques

N°22

Exercice 1)

On définit une suite (u_n) par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2n - 1 \end{cases}$$

1) Calculer u_1, u_2, u_3. La suite (u_n) est-elle croissante ou décroissante?
2) On pose $v_n = u_n - 4n + 10$. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3.
3) Montrer que la suite (v_n) est géométrique, en préciser la raison.
4) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
5) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
6) Quelle est la limite de (u_n)?
7) On pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$. Donner l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 2)

Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1}\sqrt{2+u_n} \end{cases}$$

1) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, représenter la fonction f définie sur [-2,3] par $f(x) = \sqrt{2+x}$ et les premiers termes de la suite (u_n).
Quelle semble être la limite de (u_n)?
2) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n, 0 \leq u_n \leq 2$.
3) Montrer que (u_n) est croissante.
4 Montrer que pour tous x et y de [0;2] on a $|f(y) - f(x)| \leq \dfrac{|y-x|}{2\sqrt{2}}$

5 a) En déduire que pour tout n, on a $|u_{n+1} - 2| \leq \dfrac{|u_n - 2|}{2\sqrt{2}}$

b) En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrrence, que pour tout n,
$|u_n - 2| \leq \dfrac{|u_0 - 2|}{(2\sqrt{2})^n}$

c) Quelle est la limite de (u_n)?

Barème possible: 1) 10 points ; 2) 10 points .