Classe de première S_2 ***Jeudi 2 octobre 1997***

Devoir de mathématiques n°2

Exercice 1) (4 points)

a) Dans une salle de spectacle, il y avait des places à 15F, à 20F et à 25F. Le nombre de places à 20F était double du nombre de places à 25F, et le nombre de places à 15F était la moitié du nombre total de places. Lorsque la salle était pleine, la recette brute était de 9460F. Déterminer le nombre de places de chaque sorte.

b) Un cycliste effectue un trajet de 9 heures. Sa vitesse sur le premier tiers est de 30 km/h, sur le second de 20 km/h, et sur le troisième de 15 km/h (il a faibli vers la fin). Déterminer la longueur du trajet et la vitesse moyenne de notre héros.

Exercice 2) (3 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} x+y+z+t=3 \\ 2x-y-2z+t=5 \\ x-2y+z-3t=-3 \\ -x-y+3z-2t=-2 \end{cases}$$

Exercice 3 (6 points)

ABC est un triangle, I est le barycentre de (A,2) (C,1), J le barycentre de (A,1) (B,2), K le barycentre de (C,1) (b,-4).

a) Construire I, J et K.
b) Montrer que B est le barycentre de (K,3) (C,1).
c) Quel est le barycentre de (A,2), (K,3) (C,1) ?
En déduire la position de J par rapport à I et K.

d) Soit L le milieu de [CI] et M celui de [KC]. Déterminer 4 réels a, b, c, d tels que L soit le barycentre de (A,a) (C,b) et M celui de (B,c) (C,d).
e) Montrer que IJML est un parallélogramme dont le centre est l'isobarycentre G de ABC

Exercice 4 (7 points)

ABC est un triangle. On définit 3 points : *A'* sur (*BC*), *B'* sur (*AC*) et *C'* sur (*AB*) par $\overrightarrow{A'C} = r\overrightarrow{A'B}$, $\overrightarrow{C'B} = p\overrightarrow{C'A}$, $\overrightarrow{B'A} = q\overrightarrow{B'C}$, *p*, *q*, et *r* étant trois réels différents de 1.

a) Justifier l'existence et l'unicité de ces points.

b) On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Donner les coordonnées de *A*, *B* et *C*.

Montrer que les coordonnées de *A'*, *B'* et *C'* sont $A'\left(\frac{r}{r-1}, \frac{1}{1-r}\right), B'\left(0, \frac{q}{q-1}\right), C'\left(\frac{1}{1-p}, 0\right)$

c) En déduire qu'une équation de (*BB'*) est $qx - (1-q)y = q$ et
qu'une équation de (*CC'*) est $(1-p)x + y = 1$.
Donner une équation de (*AA'*)

d) Déterminer les coordonnées du point *H*, intersection de (*BB'*) et (*CC'*), s'il existe.

e) Montrer que *H* est sur (*AA'*) si et seulement si $pqr = -1$.

f) Justifier le théorème de Ceva: les trois droites (*AA'*), (*BB'*), (*CC'*) sont concourantes ou parallèles si et seulement si $pqr = -1$.