Classe de 1ère S_5

Corrigé du DS 8

Première partie

Exercice 1

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\cos^2 x - 5\cos x + 6 \leq 0$. Posons $X = \cos x$, nous obtenons $X^2 - 5X + 6 \leq 0$. Ce trinôme du second degré a pour racines 2 et 3, et est négatif à l'intérieur. On veut donc que $\cos x$ soit compris entre 2 et 3, ce qui n'est pas possible. $S = \varnothing$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$, les solutions sont donc $\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}[2\pi] \text{ ou} \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{7\pi}{12}[2\pi] \text{ ou} \\ 2x = \frac{13\pi}{12}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{24}[\pi] \text{ ou} \\ x = \frac{13\pi}{24}[\pi] \end{cases}$. Il y a donc 4 mesures principales des solutions, ce sont $\frac{7\pi}{24}, \frac{7\pi}{24} - \pi = -\frac{17\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}, \frac{13\pi}{24} - \pi = -\frac{11\pi}{24}$.

3) Résoudre sur $[0;2\pi]$ $2\cos x + 1 > 0$. Cette inéquation équivaut à $\cos x > -\frac{1}{2}$, ce qui est vrai sur le cercle trigonométrique à droite des points d'abscisse $-\frac{1}{2}$, qui correspondent aux angle orientés $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$. On a donc $S = \left[0;\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{4\pi}{3};2\pi\right]$.

Exercice 2

1) Comme *ABC* est isocèle en *A*, les angles $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$ sont égaux. La somme des angles $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$ valant π, on obtient par conséquent $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \frac{2\pi}{5}[2\pi]$ donc $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = -\frac{2\pi}{5}[2\pi]$.

2) (*BD*) est la bissectrice intérieure de $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$ donc $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = \frac{\pi}{5}[2\pi] = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Comme on a aussi évidemment $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right)$ car *C*, *D* et *A* sont alignés dans cet ordre, les triangles *ABC* et *BCD*, ayant deux angles égaux, sont de même forme.
On en déduit que les côtés homologues sont proportionnels, c'est-à-dire $\frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AB} = \frac{BD}{AC}$, ce qui s'écrit $\frac{CD}{y} = \frac{y}{x} = \frac{BD}{x}$ donc $BD = y$ et $CD = \frac{y^2}{x}$.

3) Les angles $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right)$ sont tous deux égaux à $\frac{\pi}{5}[2\pi]$, le triangle *ADB* est isocèle en *D*, donc *AD* = *BD* = *y* et comme *AC* = *AD* + *CD*, on a $x = y + \frac{y^2}{x}$.

4) L'équation ci-dessus s'écrit $y^2+xy-x^2=0$, on la résout en inconnue y. Elle a pour discriminant $\Delta = 5x^2$, donc, comme y est positif, il ne reste que $y=\dfrac{-x+x\sqrt{5}}{2}$ *cqfd*.

Dans le triangle *ABC*, on regarde l'angle en *B*. Son cosinus vaut $\dfrac{\frac{1}{2}BC}{BA}$, donc on a bien $\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{y}{2x}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$. De même dans le triangle *ABD*, le cosinus de l'angle en *B* vaut $\dfrac{\frac{1}{2}BA}{BD}$, donc $\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{x}{2y}=\dfrac{1}{-1+\sqrt{5}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. Comme $\dfrac{\pi}{5}$ et $\dfrac{2\pi}{5}$ appartiennent à $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, leurs sinus sont positifs, et valent respectivement :

$$\sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}}=\sqrt{1-\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{16}}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\quad\text{et}$$

$$\sin\frac{2\pi}{5}=\sqrt{1-\cos^2\frac{2\pi}{5}}=\sqrt{1-\frac{\left(-1+\sqrt{5}\right)^2}{16}}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Deuxième partie

Exercice 1

Pour chacun des points, on applique les formules $\begin{cases} R=\sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta=\dfrac{x}{R} \\ \sin\theta=\dfrac{y}{R}\end{cases}$ ou $\begin{cases} x=R\cos\theta \\ y=R\sin\theta\end{cases}$.

$A(2\sqrt{3};-2)$: $R_A=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=\sqrt{12+4}=4$, $\cos\theta_A=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \sin\theta_A=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$.

On a donc $A\left[4;-\dfrac{\pi}{6}\right]$

$B\left[2;\dfrac{5\pi}{6}\right]$: $x_B=2\cos\dfrac{5\pi}{6}=2\times\dfrac{-\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}, y_B=2\sin\dfrac{5\pi}{6}=2\times\dfrac{1}{2}=1$. $B\left(-\sqrt{3};1\right)$.

De même on trouve $C[5;\pi], D\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right), E\left[\pi\sqrt{2};\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

Pour *F*, il faut rechercher l'argument : $1727=6\times287+5$ donc $\dfrac{1727\pi}{3}=287\times2\pi+\dfrac{5\pi}{3}$. On a donc $F\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{-\sqrt{3}}{4}\right)$.

Exercice 2

1) $M_0(1;0)$ donc $M_0[1;0]$. Appelons R la distance OM_1. On a $\cos\theta_1 = \dfrac{x_{M_1}}{R}$ donc $R = \dfrac{x_{M_1}}{\cos\theta_1} = \dfrac{1}{1/2} = 2$. On a ensuite $y_{M_1} = R\sin\theta_1 = 2\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. On obtient finalement $M_1\left(1;\sqrt{3}\right)$ et $M_1\left[2;\dfrac{\pi}{3}\right]$.

2) Les triangles OM_0M_1 et OM_1M_2 étant directement semblables, on a $\dfrac{OM_2}{OM_1} = \dfrac{OM_1}{OM_0} = 2$ et $\left(\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2}\right) = \left(\overrightarrow{OM_0},\overrightarrow{OM_1}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. On obtient donc que $OM_2 = 4$ et $\left(\overrightarrow{OM_0},\overrightarrow{OM_2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$, c'est à dire que $M_2\left[4,\dfrac{2\pi}{3}\right]$. On en déduit que $M_2(-2;2\sqrt{3})$. D'autre part, la distance M_1M_2 vaut 2 fois la distance M_0M_1 (toujours les triangles semblables), donc $2\sqrt{3}$.

3) On construit ainsi de suite d'autres points, toujours en tournant de $\dfrac{\pi}{3}$, et en doublant la distance à O. On a donc $M_3[8;\pi]$ et $M_3(-8;0)$, et en continuant on obtient $M_{2001}\left[2^{2001};\dfrac{2001\pi}{3}\right]$, c'est à dire, 2001 étant un multiple impair de 3, $M_{2001}\left[2^{2001};\pi\right]$, ou encore $M_{2001}(-2001;0)$.

Exercice 3

1) I, milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle ABE, en est le centre du cercle inscrit. Le triangle IEB est donc isocèle en I, ses angles à la base sont donc égaux, et on a bien, puisqu'ils tournent dans le même sens, que $\left(\overrightarrow{EI},\overrightarrow{EB}\right) = \left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BI}\right) = \left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}\right)$ car B, E, D et B, I, A sont alignés dans cet ordre.

2) D'après la relation de Chasles, $\left(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)$ ce qui donne le résultat demandé $\left(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{CD}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)[2\pi]$ car (EB) et (CA) sont perpendiculaires.

3) De nouveau avec la relation de Chasles :
$\left(\overrightarrow{EI},\overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{EI},\overrightarrow{EB}\right) + \left(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}\right) - \dfrac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)$. Comme les points A, B, C et D sont cocycliques dans cet ordre, les angles $\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}\right)$ sont égaux, on obtient donc que $\left(\overrightarrow{EI},\overrightarrow{CD}\right) = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

4) On a donc prouvé que si A, B, C et D étaient 4 points d'un cercle avec (AC) et (BD) perpendiculaires et sécantes en E, la médiane issue de E du triangle ABE est la hauteur du triangle ECD.