Classes de Première S

Contrôle commun de mathématiques de Février 2000

Durée : 2 heures

Calculatrice autorisée

Exercice 1) (7 points)

On pose $P(X) = 4X^3 + 2X^2 - 2X - 1$.

1) Calculer $P(-\frac{1}{2})$ et en déduire une factorisation de *P*.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(X) = 0$, étudier le signe de $P(X)$

3) Montrer que, pour tout réel *x*, on a $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

4) En déduire que pour tout réel *x*, $\cos(3x) + \cos(2x) + \cos x = 4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 2\cos x - 1$.

5) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos(3x) + \cos(2x) + \cos x = 0$.

6) Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$ l'inéquation $\cos(3x) + \cos(2x) + \cos x < 0$.

Exercice 2)(13 points)

A et *B* sont deux points du plan tels que *AB* = 6, *k* est un réel positif. On cherche à déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_k$ des points *M* du plan vérifiant $\frac{MA}{MB} = k$.

1) Montrer que *M* appartient à $\mathcal{E}_k$ si et seulement si $MA^2 - k^2 MB^2 = 0$.
   Déterminer $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_1$.

On va déterminer $\mathcal{E}_2$ de deux manières différentes.
On rappelle que $\mathcal{E}_2$ est l'ensemble des points M tels que $MA^2 - 4MB^2 = 0$.
Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

2) a) Justifier l'existence du barycentre *G* de (*A*, 1) (*B*, -4). Construire *G* et calculer *GA* et *GB*.
   b) Montrer que pour tout point *M* du plan, $MA^2 - 4MB^2 = -3MG^2 + 48$
   c) En déduire $\mathcal{E}_2$ et le construire.

3) On appelle *O* le milieu de [*AB*], et on munit le plan d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et de même sens.
   a) Donner les coordonnées des points *A* et *B*
   b) Soit *M*(*x*, *y*) un point du plan. Montrer que $MA^2 - 4MB^2 = -3x^2 - 3y^2 + 30x - 27$.
   c) En déduire qu'une équation de $\mathcal{E}_2$ est $x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$.
   d) En déduire la nature et les caractéristiques de $\mathcal{E}_2$ et le construire.

4) On cherche à déterminer $\mathcal{E}_k$ dans le cas général par une troisième méthode ($k \neq 1$)
   a) Justifier l'existence des points H_1 et H_2, barycentres respectifs de (*A*, 1) (*B*, *k*) et (*A*, 1) (*B*, -*k*).
   b) Montrer que pour tout point *M* du plan, $MA^2 - k^2 MB^2 = (1 - k^2)\overrightarrow{MH_1} \cdot \overrightarrow{MH_2}$.
   c) En déduire la nature de $\mathcal{E}_k$.