Classe de Première S_5

Correction du DS 12

Exercice 1)

a) Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(2x+x)\\
&= \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x \text{ d'après les formules d'addition}\\
&= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin x\cos x\sin x \text{ car } \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \text{ et } \sin(2x) = 2\sin x\cos x\\
&= \cos x(2\cos^2 x - 1 - 2\sin^2 x)\\
&= \cos x(2\cos^2 x - 1 - 2(1-\cos^2 x)) \text{ car } \cos^2 x + \sin^2 x = 1\\
&= \cos x(4\cos^2 x - 3)\\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x
\end{aligned}$$

b) On a vu à la question précédente que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

D'autre part, $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

Il en résulte que, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
\cos(3x) + \cos(2x) + \cos x &= 4\cos^3 x - 3\cos x + 2\cos^2 x - 1 + \cos x\\
&= 4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 2\cos x - 1
\end{aligned}$$

c) Posons $P(X) = 4X^3 + 2X^2 - 2X - 1$.

On a

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{-1}{2}\right) &= 4.\frac{-1}{8} + 2.\frac{1}{4} - 2.\frac{-1}{2} - 1\\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + 1\\
&= 0
\end{aligned}$$

$-\frac{1}{2}$ est une racine de P, qui peut donc se factoriser par $X + \frac{1}{2}$: Employons la méthode de Horner.

	4	2	-2	-1
$-\frac{1}{2}$		-2	0	1
	4	0	-2	0

Donc $4X^3 + 2X^2 - 2X - 1 = (X + \frac{1}{2})(4X^2 - 2)$

Remarque: On aurait pu écrire que
$4X^3 + 2X^2 - 2X - 1 = 2X^2(2X+1) - (2X+1) = (2X^2 - 1)(2X+1)$, ce qui était moins fatigant.

Dans tous les cas, on en déduit que

$$4X^3+2X^2-2X-1=0 \Leftrightarrow X=-\frac{1}{2} \text{ ou } 4X^2-2=0$$

$$\Leftrightarrow X=-\frac{1}{2} \text{ ou } X^2=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow X=\frac{-1}{2} \text{ ou } X=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } X=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'équation a pour solution $S=\left\{-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

d) $\cos(3x)+\cos(2x)+\cos x=0 \Leftrightarrow 4\cos^3 x+2\cos^2 x-2\cos x-1=0$ d'après le b)

Si l'on pose $X=\cos x$, on retrouve l'équation du c). Il vient donc

$\cos x=-\frac{1}{2}$ ou $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui équivaut à

$x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Finalement $S=\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi,-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$

(car $\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ recouvre les 4 possibilités $\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}$)

Exercice 2)

a) Pour tout réel x,

$$2\cos(x+\frac{\pi}{3})=2(\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}) \text{ d'après les formules d'addition}$$

$$=2(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x) \text{ car } \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2} \text{ et } \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\cos x-\sqrt{3}\sin x$$

$$=f(x) \text{ par définition}$$

b) Par conséquent,

$$f(x)\geq-\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\cos(x+\frac{\pi}{3})\geq-\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x+\frac{\pi}{3})\geq-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Posons $y=x+\frac{\pi}{3}$: on obtient $\cos y\geq-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'ensemble des y est donc l'arc du cercle trigonométrique limité par les points $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$, à droite de ces points.

Comme $x=y-\frac{\pi}{3}$, l'ensemble des x est l'arc limité par $\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=\frac{11\pi}{12}$, à droite de ces points. Sur $[0,2\pi[$, on obtient $S=\left[0,\frac{5\pi}{12}\right]\cup\left[\frac{11\pi}{12},2\pi\right[$

c)

$$\cos(3x) - \sqrt{3}\sin(3x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow f(3x) = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(3x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos(3x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Donc $S = \left\{-\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Pour trouver les mesures principales des solutions, on donne à k trois valeurs consécutives (à cause de $\frac{2k\pi}{3}$) en veillant à ce que les valeurs obtenues pour x soient comprises dans $\left]-\pi, \pi\right]$.

On obtient $-\frac{13\pi}{18}, -\frac{\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$.

Et hop.