Classe de première S_2 **Jeudi 22 Janvier 1998**

Devoir de mathématiques

N°14

Exercice 1)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes

1) a) Développer $\sin(x+\frac{\pi}{3})$

b) En déduire la résolution dans $[0, 2\pi[$ de l'équation $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$

c) En déduire la résolution dans $[0, 2\pi[$ de l'équation $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=1$

2) Résoudre dans $[0, 2\pi[$

a) $\cos x(2\cos x-1)>0$

b) $\sin(x-\frac{\pi}{6})\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 2)

On appelle *f* la fonction définie sur **R** par $f(x)=x^3+3x^2-9x+6$. On appelle *C* la courbe de *f* dans le plan muni d'un repère orthonormal. On ne cherchera pas à tracer *C*.

1) Montrer que *C* admet un centre de symétrie I d'abscisse -1. Préciser l'ordonnée de I.

2) Soient *x* et *y* deux réels. Montrer que $f(y)-f(x)=(y-x)(x^2+y^2+xy+3x+3y-9)$

En déduire que *f* est croissante sur $[1, +\infty[$ et décroissante sur $[-1; 1]$

Expliquer comment la symétrie de *f* permet d'obtenir son sens de variation sur $]-\infty, -1]$

3) Montrer que si $x>1$, alors $f(x)>x^3$. En déduire que *f* n'est pas majorée sur **R**.

4) Montrer que la fonction g, définie sur $[-1, +\infty[$ par $g(x)=\frac{1}{x^3+3x^2-9x+6}$, est bornée.

Exercice 3)

On définit sur **R** deux fonctions *f* et *g* par $f(x)=\frac{2}{1+x^2}$ et $g(x)=1-\frac{1}{x^2+2x+2}$

On note *C* et *C'* leurs courbes respectives dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1) Justifier que $f(x)$ et $g(x)$ existent pour tout réel *x*.

2) Montrer que, pour tout réel *x*, $g(x)=\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1}$

3) Montrer que les abscisses des points d'intersection de *C* et *C'* vérifient l'équation $x^2(x+1)^2-1=0$. Résoudre cette équation et donner les points d'intersection de *C* et *C'*.

4) Montrer que *C* et *C'* admettent chacune un axe de symétrie que l'on précisera.

5) Etudier les variations de *f* et g.

6) Montrer que *C'* est l'image de *C* dans la symétrie de centre $I(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Barème possible: 1) 5 pts ; 2) 6 pts ; 3) 9 pts.