Classe de première S_7

Corrigé du DS 11

Exercice 1)

1) a) $2\sin(2x)+\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \sin(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=-\frac{\pi}{3}[2\pi] \\ ou \\ 2x=-\frac{2\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{\pi}{6}[\pi] \\ ou \\ x=-\frac{\pi}{3}[\pi] \end{cases}$. Les mesures principales des solutions sont $-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$.

b) Posons $X=\cos 2x$. Nous obtenons $X^2+4X+3=0$, équation du second degré de discriminant 4, de racines –1 et –3. Revenons à x : $\cos 2x=-3$ est impossible, $\cos 2x=-1$ a pour solutions $2x=\pi[2\pi] \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}[\pi]$. Sur]-$\pi$; π], les solutions sont $-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}$.

c) Posons $y=x-\frac{2\pi}{3}$. On veut résoudre $\cos y \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui correspond aux angles situés sur le cercle à droite de la droite d'équation $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ou encore à l'arc de cercle délimité par les angles $-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}$, à droite de ceux-ci. On a déterminé *y*, on revient à *x* en remarquant que $x=y+\frac{2\pi}{3}$. Les extrémités de l'arc de cercle solution sont donc $-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}=\frac{11\pi}{12}$. On veut la solution sur [0 ; 2π[, c'est $\left[\frac{5\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right]$.

d) Deux angles ayant même sinus sont égaux ou supplémentaires. On a donc :

$$\sin x=\sin(2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2x[2\pi] \\ ou \\ x=\pi-2x[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0[2\pi] \\ ou \\ 3x=\pi[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0[2\pi] \\ ou \\ x=\frac{\pi}{3}[\frac{2\pi}{3}] \end{cases}.$$

Les mesures principales des solutions sont $0,\frac{\pi}{3},\pi,-\frac{\pi}{3}$.

2) Question de cours laissée au lecteur.

Exercice 2)

1) Figure

2) a) Dans le repère polaire $(O,\overrightarrow{OA})$, $A[R_1,0]$ et $B[R_1,\dfrac{\pi}{2}]$ (car *OAB* est isocèle rectangle).

D'après les données , $C[R_2,\theta]$. De plus,

$OD = OC = R_2$ et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}) = \theta + \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $D[R_2,\theta+\dfrac{\pi}{2}]$

b) On a $O(0;0), A(R_1;0), B(0;R_1), C(R_2\cos\theta, R_2\sin\theta)$ par théorème sur le passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes.

c) $x_D = R_2\cos(\theta+\dfrac{\pi}{2}) = -R_2\sin\theta, y_D = R_2\sin(\theta+\dfrac{\pi}{2}) = R_2\cos\theta$ d'après les formules sur les angles associés.

3) On en déduit les coordonnées de I : $x_I = \dfrac{x_A + x_D}{2} = \dfrac{R_1 - R_2\sin\theta}{2}, y_I = \dfrac{y_A + y_D}{2} = \dfrac{R_2\cos\theta}{2}$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$ sont $\overrightarrow{BC}(R_2\cos\theta, R_2\sin\theta - R_1)$.

4) Il ne reste plus qu'à vérifier que *xx' + yy'* = 0, ce qui est facile.

Exercice 3

1) Figure.

2) L'angle $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AI})$ est donné dans l'énoncé et a pour mesure $\dfrac{\pi}{3}$. Pour l'angle $(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB})$, on écrit que $(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BI}) + (\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IA}) = \pi$, on remplace $(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IA})$ par sa valeur $\dfrac{\pi}{2}$, on dit que $(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BI})$ sont égaux, et on obtient $(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}) = \dfrac{\pi}{4}$.

3) Les longueurs *AO* et *OJ* sont toutes deux égales à *OI* d'après la définition des triangles *AIO* et *OIJ*. Il en résulte que *AOJ* est isocèle en *O*. Calculons ses angles.
$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OJ}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$. La somme $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OJ}) + (\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{JO},\overrightarrow{JA})$ est égale à π, les angles $(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AO})$ et $(\overrightarrow{JO},\overrightarrow{JA})$ sont égaux, leur valeur est donc $\dfrac{5\pi}{12}$.

4) On a $(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AI}) + (\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}) = \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4} = \pi$. Les points *A*, *J* et *B* sont donc alignés, avec *A* entre *J* et *B*.

Exercice 4

La petite aiguille fait un tour (2π radians) en 12heures, la grande un tour en 1 heure. Leurs vitesses respectives sont donc $\dfrac{\pi}{6}$ et π radians par heure. Elles partent à 0h du même point, et on veut que leurs angles soient séparés de π. On a donc à résoudre $\pi t = \dfrac{\pi}{6}t + \pi[2\pi]$, ce qui équivaut à $\dfrac{11\pi}{6}t = \pi[2\pi]$, c'est à dire $t = \dfrac{6}{11}[\dfrac{12}{11}]$. Les heures recherchés sont donc :
$\dfrac{6}{11}, \dfrac{18}{11}, \dfrac{30}{11}, \dfrac{42}{11}, \dfrac{54}{11}, \dfrac{66}{11}(=6h), \dfrac{78}{11}, \dfrac{90}{11}, \dfrac{102}{11}, \dfrac{114}{11}, \dfrac{126}{11}$ si on se limite au matin.