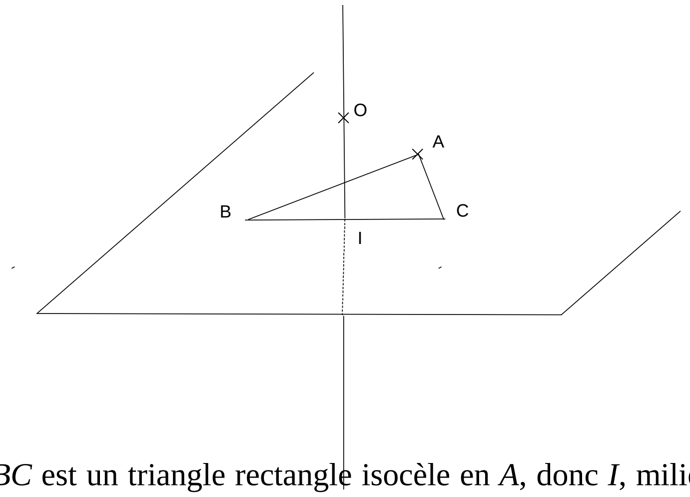
Classe de Seconde 18

Corrigé du devoir n°17

Exercice 1)

1)



2) *ABC* est un triangle rectangle isocèle en *A*, donc *I*, milieu de son hypoténuse est aussi le centre de son cercle circonscrit. On a donc *IA* = *IB* = *IC*. Comme par hypothèse *IO* = *IA*, les quatre points *O*, *A*, *B*, *C* son bien sur une même sphère de centre *I*. Le rayon de cette sphère est égal à la moitié de *BC*. Or *BC* est l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle de côté 4 cm, on a donc $BC = 4\sqrt{2}$ cm, et le rayon de la sphère vaut donc $2\sqrt{2}$ cm.
3) La droite (*OI*) est perpendiculaire au plan (*ABC*) donc est orthogonale à toute droite de ce plan. (*OI*) est donc perpendiculaire à (*BC*). (*AI*), médiane du triangle isocèle *ABC*, est aussi sa hauteur, donc (*AI*) est orthogonale à (*BC*). (*BC*), orthogonale à deux sécantes du plan (*AOI*), est donc orthogonale à ce plan.
4) (*OI*) est orthogonale à toute droite du plan (*ABC*), donc en particulier à (*IA*) , (*IB*) et (*IC*). Les triangles *IOA*, *IOB* et *IOC* sont donc rectangles en *I*, et isocèles d'après la première question, de côtés *IA* = *IB* = *IC* = *IO* = $2\sqrt{2}$ cm. Leurs hypoténuses respectives *OA*, *OB*, *OC* ont donc pour longueur $2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=4$ cm qui est aussi égale à *AB* et *AC*. Les triangles *AOC* et *AOB* sont donc équilatéraux.
5) *J* est le milieu de [*OA*]. *J*, milieu de l'hypoténuse du triangle *IOA* (qui est rectangle isocèle en *I*). *IJ* est donc égal à la moitié de cette hypoténuse, donc *IJ* = 2 cm.
(*IJ*), médiane du triangle isocèle *IOA*, en est aussi la hauteur, donc (*IJ*) et (*OA*) sont perpendiculaires. D'autre part, (*IJ*) est une droite du plan (*IOA*), et on a vu au 3) que (*BC*) était orthogonale à (*IAO*). (*BC*) est donc orthogonale à toute droite de (*IOA*), donc en particulier à (*IJ*). Comme ces droites sont sécantes en *I*, elles sont perpendiculaires.

Exercice 2

1) Si *ABCD* est un carré de côté *a* et de centre *O*, alors sa diagonale vaut $AC = BD = a\sqrt{2}$, donc $OA = OB = OC = OD = a\frac{\sqrt{2}}{2}$. La droite (*OS*) perpendiculaire au plan du carré, est perpendiculaire aux droites (*OA*), (*OB*), (*OC*), (*OD*). Les triangles *SOA*, *SOB*, *SOC*, *SOD*

sont donc rectangles en O, de côtés $OS = h$ et $OA = OB = OC = OD = a\frac{\sqrt{2}}{2}$. La longueur de leurs hypoténuses SA, SB, SC, SD qui sont les côtés de la pyramide, vaut donc d'après le théorème de Pythagore : $l = SA = \sqrt{OS^2 + OA^2} = \sqrt{h^2 + \left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}$. Le volume de la pyramide vaut le tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur, $V = \frac{a^2 h}{3}$

Dans la Pyramide de Kheops, on connaît la valeur de a (227 m) et celle de l(217 m), et on veut h. On a donc $l^2 = h^2 + \frac{a^2}{2}$ donc $h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{217^2 - \frac{227^2}{2}} = \sqrt{\frac{4269}{2}} \approx 146$ m

La pyramide de Kheops est restée le plus haut monument construit par l'homme jusqu'à la tour Eiffel.

2) Le volume du cône est égal au tiers du produit de l'aire de sa base $\pi \times 3^2 = 9\pi$ par sa hauteur, on obtient $V = \frac{1}{3} \times 9\pi \times 10 = 30\pi \approx 94 \text{ cm}^3$. Si on le remplit à mi-hauteur, la hauteur devient 5 cm, mais le cercle de base a aussi diminué, d'après le théorème de Thalès son rayon n'est plus que 1,5 cm. Le volume de liquide restant est donc $V = \frac{1}{3} \times 1{,}5^2 \times \pi \times 5 = \frac{15}{4}\pi \approx 12 \text{ cm}^3$, donc 8 fois moins.

Exercice 3

BCED est un parallélogramme de centre *O*. *A* est un point extérieur au plan (*BCE*).

1) Figure.
2) La droite (*EC*) est parallèle à (*BD*), donc elle est parallèle à une droite de (*ABD*), donc elle est parallèle au plan (*ABD*).
3) Comme (*AD*) est incluse dans (*ABD*), elle ne peut pas couper (*EC*). Comme (*EC*) est parallèle à (*BD*), (*EC*) ne peut pas être parallèle à (*AD*), sinon (*BD*) et (*AD*) seraient parallèles. (*EC*) et (*AD*) ne sont donc pas coplanaires. On pouvait démontrer ce résultat d'une autre manière : en disant que *A* est à l'extérieur du plan (*CDE*), donc que (*AD*) ne pouvait pas être coplanaire avec (*EC*).
4) Les plans (*ADE*) et (*ABC*) ont *A* en commun. D'autre part, ils contiennent respectivement les parallèles (*DE*) et (*BC*). D'après le théorème du toit, leur intersection est dont la parallèle commune à ces deux droites passant par *A*.
5) Comme *G* est le centre de gravité de *ACD*, *G* est situé sur sa médiane [*AO*], aux deux tiers à partir de *A*. Mais *O* est aussi le milieu de [*BE*], donc [*AO*] est une médiane du triangle *ABE*. *G*, situé sur cette médiane, aux deux tiers à partir de *A*, en est le centre de gravité.
6) Comme *I* est le milieu de [*AB*], [*EI*] est une autre médiane de *ABE*. Elle passe donc aussi par *G*. Les points *G*, *E* et *I* sont donc alignés.