

Classe de seconde 18

Triangles

Exercice 1

ABC est un triangle inscrit dans un cercle \mathcal{C} de centre O . H est le pied de la hauteur issue de A et $[AA']$ est un diamètre de \mathcal{C} .

- 1) Démontrer que les triangles ABA' et AHC sont de même forme.
- 2) En déduire que $AB \times AC = AH \times AA'$
- 3) Énoncer le théorème qui vient d'être démontré.
- 4) Faire une figure avec \mathcal{C} de rayon 7cm, $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm.
- 5) Dans ce cas, calculer la longueur de la hauteur BK .

Exercice 2

A l'extérieur d'un triangle ABC on construit les carrés $ABDE$ et $ACFG$. M est le milieu de $[BC]$, et A' le symétrique de A par rapport à M .

- 1) Faire une figure avec $AB = 5$ cm, $AC = 7$ cm, $BC = 8$ cm
- 2) A l'aide d'une rotation de centre A , montrer que les triangles AEC et ABG sont superposables. Que peut-on dire des segments $[EC]$ et $[BG]$?
- 3) Montrer que les angles \widehat{EAG} et $\widehat{ABA'}$ ont leurs côtés perpendiculaires. Que peut-on en déduire ?
- 4) Montrer que les triangles EAG et ABA' sont superposables.
- 5) En déduire que $EG = 2AM$.
- 6) On appelle H le pied de la hauteur de ABC issue de A , et N le milieu de $[EG]$.
 - a) Que peut-on dire des triangles EAN et BAM ?
 - b) En déduire que $\widehat{NAE} + \widehat{EAB} + \widehat{BAH} = 180^\circ$.
 - c) Que peut-on en conclure pour les points A, N, H ?

Exercice 3

Le but du problème est de déterminer les cosinus de $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$

ABC est un triangle isocèle de sommet principal A , de côté $AB=1$ et tel que $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{5}$. I est le milieu de $[AB]$, et la bissectrice de l'angle en B recoupe (AC) en M .

1) Quelles sont les valeurs des angles \widehat{ABC} et \widehat{ACB} ? En déduire celle de \widehat{CMB} , puis la nature du triangle BMC .

2) Prouver que le triangle AMB est isocèle, en déduire l'angle \widehat{BIM} .

3) En considérant les triangles ABC et BMC , prouver que $\frac{BC}{MC} = \frac{AC}{BC}$.

On appelle x la longueur BC . Prouver que x est solution de l'équation $x^2 + x = 1$.

4) Mettre $x^2 + x - 1$ sous forme canonique, en déduire que $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

5) Quelle est alors la valeur de BC ? En remarquant que $AM = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{5}}$, montrer que $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Déterminer $\cos \frac{2\pi}{5}$ en utilisant le triangle ABK (K milieu de $[BC]$).