Classe de seconde 18

Corrigé du devoir de mathématiques N°19

Exercice 1)

1) *D* est sur la médiatrice de [*AC*] donc *DAC* est isocèle en *D*. (0,5 point)
2) $\widehat{EAC} = \pi - \widehat{CAD}, \widehat{ABD} = \pi - \widehat{ABC}$. D'autre part,

   $\widehat{ABC} = \widehat{BCA}$ (ABC est isocèle) $= \widehat{CAD}$ (DAC est isocèle)

   On a bien montré que $\widehat{EAC} = \widehat{ABD}$. (1 point)
3) Par hypothèse, *AE* = *BD*. D'autre part, *ABC* est isocèle donc *AC* = *AB*.

   Les triangles *CAE* et *ABD* ont des angles $\widehat{EAC}$ et $\widehat{ABD}$ égaux, encadrés par des côtés de même longueur. Ils sont donc isométriques. (0,75 point)
4) Les troisièmes côtés de ces triangles sont donc aussi de même longueur : *CE* = *AD*. On sait que *DAC* est isocèle en *D*, donc *AD* = *DC*. On a donc *CE* = *DC* et *CDE* est isocèle en *C*. (0,75 point)

Exercice 2)

1) *ABC* et *HBA* sont rectangles respectivement en *A* et *H*, et $\widehat{ABC} = \widehat{HBA}$ car *H* appartient à [*BC*]. Les triangles *ABC* et *HBA* ont deux angles correspondants égaux, ils sont de même forme. (0,5 point)
2) On a donc $\frac{AB}{HB} = \frac{AC}{HA} = \frac{BC}{BA}$, et en faisant les produits en croix des termes extérieurs, on obtient $AB^2 = BH \times BC$. (0,5 point)

   On montre de la même manière qu'au 1) que les triangles *ACB* et *HCA* sont de même forme, donc que $\frac{AC}{HC} = \frac{AB}{HA} = \frac{BC}{CA}$ et que $AC^2 = CH \times BC$. (0,5 point)
3) *ABC* et *HBA* sont de même forme, ainsi que *ACB* et *HCA*, donc aussi *ABC* et *HAC*. Les triangles *HBA* et *HAC* sont donc de même forme. On a donc $\frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC} = \frac{BA}{AC}$, et en faisant les produits en croix des deux premiers termes on obtient $AH^2 = HB \times HC$. (1 point)
4) On reprend l'égalité du 2) : $\frac{AB}{HB} = \frac{AC}{HA} = \frac{BC}{BA}$. En faisant les produits en croix des derniers termes, on obtient $AB \times AC = AH \times BC$. (0,5 point)

   Calculons à présent $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{AC^2 + AB^2}{AB^2 \times AC^2}$. On sait que $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (c'est le théorème de Pythagore), et $AB \times AC = AH \times BC$ donc $AB^2 \times AC^2 = AH^2 \times BC^2$. On obtient enfin $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{BC^2}{AH^2 \times BC^2} = \frac{1}{AH^2}$ *cqfd*. (1 point)

Exercice 3)

1) Les angles $\widehat{AIC}$ et $\widehat{BID}$ sont opposées par le sommet, donc sont égaux. Les angles $\widehat{IAC}$ et $\widehat{IDB}$, inscrits dans $\mathscr{C}$ interceptent le même arc $\widehat{BC}$, ils sont égaux. Les triangles *IAC* et *IDB*, ayant deux angles correspondants égaux, sont de même forme. (1 point)
2) On a donc $\dfrac{IA}{ID} = \dfrac{IC}{IB} = \dfrac{AC}{DB}$ et $IA \times IB = IC \times ID$ en faisant les produits en croix. (1 point)
3) On peut choisir pour [*CD*] la corde que l'on veut. Prenons celle qui passe par *O*. Elle coupe $\mathscr{C}$ en *P* et *Q*, et on a $IA \times IB = IP \times IQ$. Comme *Q*, *I*, *O*, *P* sont alignés dans cet ordre, on a $IP = IO + OP = IO + R$ et $IP = IP - IO = R - IO$. On obtient finalement $IA \times IB = IP \times IQ = (IO + R)(R - IO) = R^2 - IO^2$ (1 point)

Exercice 4)

1) *I* et *J* appartiennent à (*AIJ*) et à (*BCD*) (*I* est sur (*BC*) et *J* sur (*CD*)). L'intersection de (*AIJ*) et (*BCD*) est donc la droite (*IJ*).
2) (*MN*) est une droite de (*AIJ*). Elle rencontre donc (*BCD*) sur l'intersection de (*AIJ*) et (*BCD*) qui est (*IJ*). Le point d'intersection de (*MN*) et (*BCD*) est donc le point *K* intersection de (*MN*) et (*IJ*).
3) *B* appartient à (*BMN*) et (*BCD*), ainsi que *K*. L'intersection de (*BMN*) et (*BCD*) est donc la droite (*BK*).

Exercice 5)

1) (*MN*) et (*BC*) sont parallèles car (*MN*) est la droite des milieux du triangle *SBC*. Comme *ABCD* est un parallélogramme, (*BC*) et (*AD*) sont parallèles. Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles, donc (*MN*) et (*AD*) sont parallèles. (1 point)
2) Deux droites parallèles sont coplanaires, donc les points *M*, *N*, *A*, *D* sont coplanaires, et les droites (*AN*) et (*DM*) sont donc coplanaires. *P* est leur point d'intersection. (1 point)
3) *S* appartient aux plans (*SAB*) et (*SDC*), ainsi que *P* (*N* appartient à (*SB*) donc à (*SAB*), donc (*AN*) est incluse dans (*SAB*), et de même (*DM*) est incluse dans (*SDC*), et *P* est sur ces deux droites). L'intersection de (*SAB*) et (*SDC*) est donc (*SP*). (1 point)
4) Les plans sécants (*SAB*) et (*SDC*) contiennent les parallèles (*AB*) et (*CD*). D'après le théorème du toit, leur intersection est parallèle à ces droites, donc (*SP*) et (*AB*) sont parallèles. (1 point)

Exercice 6)

1) *A* et *I* appartiennent à $\mathscr{P}$, donc comme *J* est sur (*AI*), *J* appartient à $\mathscr{P}$. *J* appartient aussi à (*BCD*) car il est sur (*BC*). *J* appartient donc à l'intersection de $\mathscr{P}$ et (*BCD*). De plus, $\mathscr{D}$ est parallèle au plan (*BCD*), donc (*BCD*) contient une parallèle à $\mathscr{D}$. Les plans $\mathscr{P}$ et (*BCD*) contiennent des parallèles, donc d'après le théorème du toit, leur intersection est parallèle à ces droites. C'est donc bien la parallèle à $\mathscr{D}$ passant par *J*. (1 point)
2) la parallèle à $\mathscr{D}$ passant par *J* et (*CD*) sont coplanaires dans (*BCD*). Soit *K* leur point d'intersection. *K* appartient à (*ACD*) mais aussi à $\mathscr{P}$ car la parallèle à $\mathscr{D}$ passant par *J* est incluse dans $\mathscr{P}$. Comme *A* appartient aussi à (*ACD*) et $\mathscr{P}$, l'intersection de ces plans est donc la droite (*AK*). (1 point)
3) $\mathscr{D}$ et (*AK*) sont coplanaires dans $\mathscr{P}$. Leur point d'intersection appartient à (*ACD*) car (*AK*) est incluse dans (*ACD*). C'est le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et (*ACD*). (1 point)