Classe de seconde 18 ***Jeudi 16 janvier 2003***

Devoir de mathématiques

N°10

Exercice 1) (3 points)

1) Convertir en radians : 60°, 135°. Convertir en degrés : $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{-\pi}{6}$. Placer les quatre points sur un cercle trigonométrique.
2) Donner la valeur exacte de $\cos 60°, \sin(\frac{3\pi}{4}), \sin(-120°), \cos(137\pi)$.

Exercice 2) : Formule de duplication des sinus (5 points)

Construire un triangle isocèle *ABC* de sommet principal *A*. On appelle *I* le milieu de [*BC*] et *H* le projeté orthogonal de *B* sur (*AC*). On désigne par 2*x* la valeur de l'angle $\widehat{BAC}$, et par *a* la longueur *AB*.

1) Montrer que $AI = a\cos x$, exprimer de même *BI* et *BC*.
2) En déduire que l'aire de *ABC* est $a^2 \sin x \cos x$.
3) Dans le triangle *BHA*, calculer *BH*.
4) En déduire une autre expression de l'aire de *ABC*, puis que $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Exercice 3) : la hauteur inaccessible (5 points)

AOH est un triangle rectangle en *O*, *B* est un point de [*AO*]. On appelle *a* l'angle $\widehat{HOA}$ et *b* l'angle $\widehat{HOB}$. Le but de l'exercice est d'exprimer *OH* en fonction de *AB* et des angles *a* et *b*.

1) Montrer que $OH = Oa\tan a = OB\tan b$.
2) En écrivant que $OA - OB = AB$ montrer que $OA = \frac{\tan b}{\tan b - \tan a}AB$.
3) En déduire que $OH = \frac{\tan a \times \tan b}{\tan b - \tan a}AB$.
4) Une falaise se trouve de l'autre côté d'une rivière. On cherche à mesurer sa hauteur sans franchir l'eau. Du bord, on la voit suivant un angle de 50°, et 20 mètres plus loin suivant un angle de 40°. Quelle est la hauteur de la falaise ?

Exercice 4) : les lunules d'Hippocrate (5 points)

OAB est un triangle rectangle en *O*. On appelle *I* le milieu de [*AB*], *J* celui de [*OA*] et *K* celui de [*OB*]. On appelle *a* la longueur *OA* et *B* la longueur *OB*.

1) Faire une figure que l'on complétera par la suite.
2) Combien vaut la longueur *AB* ?
3) On trace de *I* un arc de cercle d'extrémités *A* et *B*, contenant *O*. Montrer que l'aire du domaine compris entre les segments [*OA*] et [*OB*] et l'arc de cercle vaut $\frac{\pi(a^2+b^2)-ab}{2}$.
4) On trace de *J* un arc de cercle d'extrémités *A* et *O*, et de *K* un arc de cercle d'extrémités *B* et *O*, à l'extérieur de l'arc de centre *I*. Montrer que l'aire comprise entre les trois arcs de cercles est égale à celle du triangle *OAB*.

Exercice 5) : le trapèze complet (2 points)

ABCD est un trapèze de bases *AB* et *CD*, *O* est le point d'intersection de (*AD*) et (*BC*), *I* est le milieu de [*AB*].

1) La droite (*OI*) coupe (*CD*) en *J*. Montrer que *J* est le milieu de [*CD*].
2) Soit Ω le point d'intersection de (*AC*) et (*BD*). Montrer que les points *O*, Ω, *I*, *J* sont alignés.