Classe de seconde 6
Correction du contrôle bilan

Exercice 1)

Dans le triangle *HED*, les droites (*JG*) et (*DE*) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, $\frac{JH}{JD}=\frac{GH}{GE}$. Comme les trois carrés ont des côtés de même longueur, $\frac{GH}{GE}=\frac{1}{2}$. On a donc $\frac{JH}{JD}=\frac{1}{2}$. On considère maintenant les droites (*BG*) et (*HD*), sécantes en *J*, et coupées par les parallèles (*BD*) et (*HG*). D'après le théorème de Thalès, $\frac{JB}{JG}=\frac{JH}{JD}=\frac{1}{2}$.

Dans le triangle *BHF*, *J* est au tiers de la médiane (*BG*). Il est donc le centre de gravité du triangle. Les points *F*, *J* et *I* sont donc alignés.

Exercice 2)

On a $737 \leqslant M \leqslant 739$ et $7{,}79 \leqslant \mu \leqslant 7{,}81$. D'autre part, $\mu=\frac{M}{V}$ donc $V=\frac{M}{\mu}$. Pour encadrer *V*, il faut déjà encadrer $\frac{1}{\mu}$, et on a $\frac{1}{7{,}81}\leq\frac{1}{\mu}\leq\frac{1}{7{,}79}$. En multipliant les deux inégalités, on obtient $\frac{737}{7{,}81}\leq V\leq\frac{739}{7{,}79}$, soit $94{,}36 \leqslant V \leqslant 97{,}87$. On a $V=\pi R^2 h$ donc $R^2=\frac{V}{\pi h}$ et $R=\sqrt{\frac{V}{\pi h}}$.

En remplaçant *V* par sa valeur, on obtient $R=\sqrt{\frac{M}{\pi h\mu}}$. $11{,}4 \leqslant h \leqslant 11{,}6$.

Exercice 3)

ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(-2\,;1)$, celles de $\overrightarrow{DC}$ sont $(5-x_D\,;-y_D)$, donc $x_D=7$ et $y_D=-1$. $D(7\,;-1)$.

$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BC}(6\,;3)$ donc $\overrightarrow{BE}(2\,;1)$. Comme $\overrightarrow{BE}(x_E+1\,;y_E+3)$ on trouve $E(1\,;-2)$.

Les segments [*FD*] et [*BC*] ont même milieu, donc *FBDC* est un parallélogramme, et $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{DC}$. $\overrightarrow{DC}(-2\,;1)$ et $\overrightarrow{BF}(x_F+1\,;y_F+3)$. On a donc $F(-3\,;-2)$.

Exercice 4)

$\begin{cases}-7\leq 2x+3\leq 1\\ -11\leq 1-4x\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-10\leq 2x\leq -2\\ -12\leq -4x\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5\leq x\leq -1\\ 3\geq x\geq -\frac{1}{4}\end{cases}$. Il n'y a donc aucune solution.

$\frac{2x+3}{1-4x}>0$ se résout avec un tableau de signe. La valeur interdite est $\frac{1}{4}$. $2x + 3$ est positif pour $x\geq-\frac{3}{2}$, et $1 – 4x$ est positif pour $x<\frac{1}{4}$. On a donc :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$2x+3$		–	0	+	||	+	
$1-4x$		+	|	+	0	–	
$\frac{2x+3}{1-4x}$		–	0	+	||	–	

La solution est donc $\left]-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{4}\right[$.

Pour $(x+1)^2-3(x+1)(x-2)\leq 0$ on doit factoriser : $(x+1)[(x+1)-3(x-2)]\leq 0$ c'est-à-dire $(x+1)(x+1-3x+6)\leq 0$ ou encore $(x+1)(-2x+7)\leq 0$. Reste à étudier chaque signe puis à faire un tableau : $x+1$ est positif si $x \geqslant -1$, et $-2x+7$ est positif pour $x\leq \frac{7}{2}$. On a donc :

x	$-\infty$		-1		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-2x+7$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$(x+1)(-2x+7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La solution est donc $\left]-\infty\,;-1\right]\cup\left[\frac{7}{2};+\infty\right[$

Pour résoudre le système $\begin{cases} a+b=15 \\ 5a-5b=45 \end{cases}$, on fait $5L_1 + L_2$ pour obtenir $10a = 120$ donc $a = 12$ et $b = 3$. La solution est donc $\{(12\ ;\ 3)\}$.

Appelons *a* un des côtés du rectangle, et *b* l'autre, avant l'augmentation. Le périmètre est 30 donc $2a + 2b = 30$ et $a + b = 15$. Quand un côté augmente de 5 pendnt que l'autre diminue de 5, ils deviennent $(a-5)$ et $(b+5)$. L'aire était ab, elle devient $(a-5)(b+5)$, et elle a augmenté de 20, donc $(a-5)(b+5) = ab + 20$ soit $ab - 5b + 5a - 25 = 20$ donc $5a - 5b = 45$. Onobtient le système précédent, donc les côtés du rectangle sont 12 et 3.

Exercice 5)

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+4x+3$.

$f(-1)=(-1)^2+4\times(-1)+3=1-4+3=0$ donc -1 est un antécédent de 0.

$f(0)=0+0+3=3$, $f(-4)=(-4)^2+4\times(-4)+3=16-16+3=3$ donc -4 et 0 ont la même image.

$f(1)=1+4+3=8$ donc 8 est l'image de 1.

Pour tout réel x, $(x+1)(x+3)=x^2+3x+x+3=x^2+4x+3=f(x)$, l'égalité est vérifiée.

On peut donc faire un tableau de signe :

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$f(x) < 0$ sur $]-3\ ;-1[$

On a le tableau de variations suivant pour *f* :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$