Quelques modèles menant à des équations différentielles

1) Dissolution :

Lorsqu'une substance se dissout, si tout se passe bien la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité qui reste à dissoudre. On place donc 10kg de sel à l'instant $t = 0$ dans une grande quantité d'eau, et on note $f(t)$ la quantité de sel dissoute à l'instant t.

a) Ecrire une équation différentielle vérifiée par f.
b) Sachant que le premier kilo est dissout en 5 minutes, déterminer la fonction f.
c) Au bout de combien de temps la moitié du sel a-t-elle été dissoute?

2) Alcoolémie:

Quand le Capitaine Haddock boit du whisky, l'alcool passe directement de l'intestin dans son sang. Une petite quantité est aussi transportée aux poumons via la veine porte, ce qui donne à notre héros son haleine caractéristique, le reste va au cerveau, ce qui met notre héros dans cet état bien connu appelé ivresse, puis arrive dans son foie, qui l'élimine en l'oxydant.. L' d'alcoolémie (quantité d'alcool par litre de sang) est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = ae^{-t} - y$ (où a est une quantité dépendant de la quantité d'alcool absorbée et du poids à jeun du Capitaine).

a) Déterminer une solution f de (E) de la forme $f(t) = kte^{-t}$, où k est une constante réelle que l'on exprimera en fonction de a.
b) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $z = y - f$ est solution de $z' + z = 0$.
c) En déduire les solutions de (E), puis l'expression du taux d'alcoolémie au cours du temps (il est nul pour $t = 0$)
d) Prenant $a = 5$, étudier les variations du taux d'alcoolémie, du Capitaine, déterminer le taux maximal d'alcoolémie, le temps au bout duquel il est atteint ainsi que le temps que Haddock devra attendre pour pouvoir conduire à nouveau sans être en infraction avec la loi française.

3) Injections

Quand une substance est introduite dans le sang, elle est éliminée, et la vitesse d'élimination est proportionnelle à la concentration de cette substance (on supposera que la substance se répand instantanément pour simplifier notre étude). Si on appelle Q la concentration, montrer que Q est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = -ay$, où a est un réel positif.

a) Un drogué s'injecte 1,5mg d'héroïne. Montrer que la quantité dans son sang de ce produit est de la forme $Q(t) = 1{,}5e^{-at}$. Déterminer a sachant que cette quantité a diminué de 30% en une heure (on en donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée). Etudier les variations de Q et donner sa courbe représentative. Au bout de combien de temps la quantité a-t-elle été réduite de moitié.
b) Il décide alors de se réinjecter une dose analogue au bout d'une heure, puis aux instants $t = 2$, $t = 3$…On note H_n la quantité d'héroïne présente dans le sang à l'instant $t = n$, dès que la nouvelle injection est faite. Montrer que $H_1 = 1{,}5 + 0{,}7 \times 1{,}5$, que $H_2 = 1{,}5 + 0{,}7 \times H_1$ et calculer H_2, exprimer H_{n+1} en fonction de H_n, puis montrer que la suite $H_n - 5$ est géométrique et exprimer H_n en fonction de n. Quelle est la limite de H_n ?
c) Pendant une perfusion, on injecte de la pénicilline dans le sang d'un malade, à raison de A milligrammes par minute (et il s'en élimine, comme toujours, la vitesse d'élimination étant proportionnelle à la quantité présente dans le sang). Montrer que la quantité Q de pénicilline présente est solution d'une équation différentielle de la forme $Q' = A - aQ$. Exprimer Q en fonction de t, A et a sachant que $Q(0) = 0$, calculer sa limite quand t tend vers $+\infty$, donner l'allure de la courbe de Q, déterminer a sachant que la demi-vie du produit est de 3h (c'est-à-dire que la quantité serait réduite de moitié en 3h si on n'en rajoutait pas), puis déterminer le débit A pour maintenir à long terme 80mg de pénicilline dans le sang de notre client.

4) Interaction proie - prédateur : le modèle de Volterra

a) La manière la plus simple de modéliser la croissance d'une population, c'est de lui supposer un taux d'augmentation uniforme (a% de naissances et b% de décès), soit si nous appelons N la population et r le taux d'augmentation (qui peut être négatif) : $\frac{dN}{dt} = rN$. Résoudre cette équation. Quelle est l'évolution à long terme de la population ?

b) Cette évolution n'est pas crédible, en particulier si $r > 0$. La croissance est freinée dès que la population augmente, et il est meilleur de modéliser le taux de croissance par $r - \frac{r}{K}N$ où r est le taux de croissance idéal, et K une constante. Ainsi, plus la population est importante, plus le taux d'accroissement est faible (par exemple, parce que la nourriture disponible est limitée). Montrer que l'on a alors $\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{1}{K}N)$. Ce genre d'équation s'appelle une équation logistique, on peut la résoudre en posant $N = \frac{1}{y}$. Un modèle discret (c'est à dire où on considère que le temps avance par à-coups, donc que l'on a une suite et non une fonction) va s'écrire : $u_{n+1} - u_n = ru_n(1 - \frac{1}{K}u_n)$. Montrez que, (en supposant $r>0$), que si $u_0 > K$, alors pour tout n $u_n > K$ et que (u_n) est décroissante, et que si $u_0 < K$, alors pour tout n $u_n < K$ et (u_n) est croissante. Vous pouvez représenter cette suite sur votre calculatrice en prenant $r = 0,2$ et $K = 1000$, quelle est la limite de (u_n) ?

c) On complique encore le modèle, en mettant une deuxième population en compétition avec la première (ce sont les prédateurs). Bien évidemment, plus il y a de prédateurs, moins les proies augmentent, et moins il y a de proies, moins les prédateurs augmentent. On a donc des équations analogues, mais où les variations des taux d'augmentation de chaque espèce dépendent des effectifs de l'autre. On obtient, en appelant M les effectifs des prédateurs, un système qui ressemble à :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = r_1 N(1 - \frac{1}{K_1}N - \frac{a}{K_1}M) \\ \frac{dM}{dt} = r_2 M(1 - \frac{1}{K_2}M + \frac{b}{K_2}N) \end{cases}$$ où a et b sont deux réels positifs.

L'évolution de tels modèles dépend nettement les valeurs de r_1, r_2, K_1, K_2, a, b .

Pour représenter une telle situation, le mieux est de prendre un tableur, et de se mettre dans le cas discret, c'est à dire

$$u_{n+1} - u_n = r_1 u_n(1 - \frac{1}{K_1}u_n - \frac{a}{K_1}v_n)$$

$$v_{n+1} - v_n = r_2 v_n(1 - \frac{1}{K_2}v_n + \frac{b}{K_2}u_n)$$

Faites une étude, en donnant aux paramètres diverses valeurs

On peut étudier le modèle plus simple

$$u_{n+1} - u_n = u_n(r_1 - av_n)$$

$$v_{n+1} - v_n = v_n(r_{2n} + bu_n)$$

Reprenez l'étude précédente sur tableur. Quel est le modèle continu correspondant ?