

Formules de Cardan pour les équations du troisième degré

On cherche à résoudre l'équation (E) : $x^3 = px + q$ (p et q sont deux réels)

Pour cela, on pose $x = u + v$.

a) Montrer que (E) devient $u^3 + v^3 + (3uv - p)(u + v) = q$

b) On pose alors $U = u^3$ et $V = v^3$. Montrer que si l'on a
$$\begin{cases} U + V = q \\ UV = \frac{p^3}{27} \end{cases}$$
, alors obtient trouver une

solution de (E).

c) A quelle condition le système précédent a-t-il une solution?

d) Pour résoudre l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, on pose $y = x+h$, et on détermine h pour obtenir une équation de la forme (E). Montrer que c'est toujours possible, et poursuivez le plan de résolution.

Remarque culturelle: La résolution de l'équation du 3^{ème} degré est apparue en Italie, au XVI^{ème} siècle. A l'époque, les mathématiciens gardaient jalousement leurs secrets, ou ne les transmettaient qu'à quelques disciples, aussi on ne sait pas trop qui a découvert le premier cette méthode. Ils se sont accusés les uns les autres de vol, se sont lancés des défis de résolution. On retient les noms de Scipione del Ferro, de Nicolo Tartaglia, et de Giordano Cardano (qui a le premier publié le résultat après que Tartaglia le lui aurait montré). Au sujet de Cardan, à part le principe de transmission des mouvements qui porte son nom, il faut savoir qu'il avait, par des calculs astrologiques, déterminé le jour de sa mort, et qu'il s'est (probablement) laissé mourir pour que ses calculs aient juste.