

Les polyèdres

On appelle polyèdre un solide dont les faces sont des polygones. Un polyèdre a des sommets, des arêtes et des faces. Un polyèdre est convexe s'il est situé entièrement du même côté de chaque face. On appelle patron d'un polyèdre une figure plane constituée de polygones, obtenue en découpant le polyèdre suivant certaines de ses arêtes et en le dépliant. Dessinez le patron d'une pyramide à base carrée, d'un prisme à base triangulaire.

Donnez un exemple de polyèdre convexe, de polyèdre non convexe.

Euler a démontré que, dans un polyèdre convexe, si S est le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces, alors $S - A + F = 2$ (c'est la formule d'Euler pour les polyèdres). Vérifiez la pour une pyramide, pour un prisme. Pouvez-vous trouver un polyèdre non convexe où elle ne marche pas ?

Les polyèdres réguliers

On appelle polyèdre régulier un polyèdre convexe où toutes les faces sont des polygones réguliers superposables (toujours le même polygone régulier) et où de chaque sommet part le même nombre d'arêtes (et donc chaque sommet appartient au même nombre de faces).

Est-il possible que les sommets n'appartiennent qu'à deux faces ?

Essayons de construire les polyèdres réguliers (cette construction a été faite par **Platon** environ en 400 avant J.C., il l'a décrite dans "le Timée")

Supposons que les faces soient des triangles équilatéraux de côté a .

Est-il possible que chaque sommet soit commun à trois triangles ? Calculer la hauteur, puis le volume, du tétraèdre régulier.

Si on veut que chaque sommet soit commun à quatre triangles, on commence le polyèdre et on fabrique une pyramide à base carrée. Ce n'est pas un polyèdre régulier puisque les faces ne sont pas toutes identiques. Compléter la pyramide pour en faire un polyèdre régulier. Il s'appelle un octaèdre. Calculer son volume.

On essaie maintenant de faire un polyèdre où chaque sommet appartient à 5 triangles. On commence par fabriquer une espèce de chapeau chinois, puis on essaie de le compléter. Expliquer pourquoi la méthode de l'octaèdre ne conviendra pas, puis regardez dans votre livre page 198 la photo de l'icosaèdre. Combien a-t-il de sommets, de faces, d'arêtes ? Dessinez-en un patron.

Que se passe-t-il si on veut que chaque sommet appartienne à 6 triangles ? Plus de 6 ?

Supposons maintenant que les faces soient des carrés. Il peut y avoir trois carrés par sommets, on obtient un cube. Pouvez-vous dessiner tous les patrons différents de cube (il y en a 11 à rotation et symétrie près) ? Quel polyèdre obtient-on en prenant les centres des faces d'un cube ? En prenant les milieux des arêtes d'un cube, on obtient un cuboctaèdre. Décrivez-en les faces. Est-ce un polyèdre régulier ?

Peut-on avoir 4 faces carrées par sommet ? Plus de 4 faces ?

Avec des pentagones, on obtient un dodécaèdre. Combien a-t-il de faces, d'arêtes, de sommets ?

Peut-on faire un polyèdre en prenant des hexagones réguliers ? Des polygones réguliers de plus de 6 côtés ?

Vous venez de prouver qu'il n'y a que 5 types de polyèdres réguliers.