Le nombre π : historique

1) Chez les hébreux

On peut lire dans la Bible (environ 550 avant J.C.) à propos de la construction du temple de Salomon (Livre des Rois) « Il fit aussi une mer de fonte de dix coudées d'un bord jusqu'à l'autre, qui était toute ronde : elle avait cinq coudées de haut et était environnée tout autour d'un cordon de trente coudées. »
Quelle valeur ce texte attribue-t-il à π ? Donnez une majoration de l'erreur commise.

2) Chez les égyptiens

Dans le papyrus Rhind, conservé au British Museum, qui date d'environ 1650 avant J.C. on donne la méthode suivante pour calculer l'aire d'un disque:
a) Enlever un neuvième au diamètre.
b) Multiplier le résultat par lui même.
Quelle valeur cela donne-t-il pour π ? (on donnera la valeur exacte, une valeur décimale approchée et une majoration de l'erreur commise.)

Euclide ($3^{\text{ème}}$ siècle avant J.C.) a démontré que le π de $P = 2\pi R$ était le même que celui de $S = \pi R^2$. Les égyptiens connaissaient déjà ce résultat, sans l'avoir démontré.

3) Archimède (Syracuse, 287-212 avant J.C.)

Il est le premier à avoir eu l'idée de donner une méthode permettant de s'approcher aussi près que possible de π, sans l'atteindre. Il encadre un cercle de rayon 1 entre deux polygones réguliers ayant le même nombre de côtés (un inscrit et un circonscrit), dit que le périmètre du cercle est compris entre les périmètres des deux polygones, il calcule ces deux périmètres et divise par 2, il obtient un premier encadrement de π. Ensuite il double le nombre de côtés et recommence. Plus le nombre de côtés devient grand, plus les polygones s'approchent du cercle et plus l'encadrement obtenu s'affine.
Il commence avec des hexagones. On appelle a_1 le demi périmètre de l'hexagone circonscrit et b_1 le demi périmètre de l'hexagone inscrit.
Calculer a_1 et b_1.
On double le nombre de côtés, pour obtenir des dodécagones. On appelle a_2 le demi périmètre circonscrit, b_2 le demi périmètre inscrit.
Archimède a démontré que $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}=\frac{2}{a_2}$ et $b_1 \times a_2 = b_2^2$ (nous admettrons ces résultats). En déduire les valeurs exactes de a_2 et b_2, puis des valeurs approchées et un encadrement de π.
On recommence en doublant encore, on a des polygones à 24 côtés, un périmètre circonscrit a_3 et un périmètre inscrit b_3, avec les mêmes formules $\frac{1}{a_2}+\frac{1}{b_2}=\frac{2}{a_3}$ et $b_2 \times a_3 = b_3^2$. En recommençant encore 2 fois, puis en calculant des racines carrées et en encadrant, Archimède est arrivé à l'encadrement $3+\frac{10}{71} \le \pi \le 3+\frac{1}{7}$. Quelle est l'amplitude de son encadrement ?

4) Al Kashi (à Samarkande vers 1450)

Il utilise des polygones, mais ne prend que des polygones inscrits. Il démontre que si $S(p)$ est le côté d'un polygone régulier à p côtés, alors $S(2p) = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S^2(p)}}$.

Prouvons ce résultat : On considère un cercle de centre O et de rayon 1, A et B deux sommets consécutifs du polygone régulier à p côtés inscrit dans le cercle. Ainsi $S(p)$ est égal à AB. On appelle I le milieu de $[AB]$, et C le point d'intersection de $[OI)$ et du cercle. Justifiez que A et C sont donc deux sommets consécutifs du polygone à $2p$ côtés, et en déduire $S(2p)$.

On pose $AB = x$. Exprimer OI en fonction de x, en déduire que $IC = 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$, calculer enfin AC en fonction de x et justifier la formule d'Al Kashi.

Il part d'un polygone à 6 côtés et double 27 fois.

Combien vaut $S(6)$?

Combien de côtés avait le polygone à la fin ?

Comme Al Kashi comptait en base 60, il est arrivé au résultat suivant :

$$\pi \approx 3 + \frac{8}{60} + \frac{29}{60^2} + \frac{44}{60^3} + \frac{0}{60^4} + \frac{47}{60^5} + \frac{25}{60^6} + \frac{53}{60^7} + \frac{7}{60^8} + \frac{25}{60^9}$$

Tous les chiffres sont justes, déduisez - l'erreur de l'approximation. Si on convertit ce résultat en base 10, combien de chiffres de π obtient-on ? Que donne votre calculatrice ?

En continuant avec la méthode d'Archimède, **Ludolph von Ceulen** a calculé 34 décimales de π en 1609, puis il a fallu trouver d'autres formules.

John Machin a calculé 100 décimales en 1706 en utilisant la formule suivante :

$$\pi = 4\left[\left(\frac{4}{1\times 5} - \frac{1}{1\times 239}\right) - \left(\frac{4}{3\times 5^3} - \frac{1}{3\times 239^3}\right) + \left(\frac{4}{5\times 5^5} - \frac{1}{5\times 239^5}\right) - \left(\frac{4}{7\times 5^7} - \frac{1}{7\times 239^7}\right) \ldots\right[$$

Il faut aller jusqu'à l'infini pour avoir la valeur exacte de π, mais Machin s'est arrêté avant.

Pouvez-vous écrire un programme de calcul utilisant cette formule pour votre calculatrice ?

En utilisant des formules analogues (que nous ne chercherons pas à démontrer) on est arrivé à 539 décimales (**Ferguson**, en 1945) toujours sans calculatrice. Les 1000 décimales ont été atteintes par **Wrench** et **Smith** avec une calculatrice de bureau en 1948, 10000 ont été obtenues en 1958 par **François Genuys** sur un ordinateur IBM 704, 100000 par **Shanks** et **Wrench** en 1961, 1000000 par **Jean Guilloud** et **Martine Bouyer** en 1973 à Rueil Malmaison (Allez Rueil). Ce million de décimales a été publié en un livre de 415 pages, on le considère comme le livre le plus ennuyeux du monde.

En utilisant des formules plus efficaces, le milliard de décimales a été atteint en 1989 (par les frères **Chudnovsky**, américains d'origine ukrainienne) et on en est à 51 milliards à l'heure où j'écris ces lignes. Le record est détenu par les japonais **Kanada** et **Takahashi**.