Exercices difficiles de mathématiques

Terminales S

Suites

Récurons, récurons….mais ce n'est pas toujours si simple.

Exercice 1) concours général 1993

Soit n un entier strictement positif donné.

a) Existe-t-il $2n + 1$ entiers naturels consécutifs $a_0, a_1, ..., a_{2n}$ rangés dans l'ordre croissant, vérifiant : $a_0 + a_1 + ... + a_n = a_{n+1} + ... + a_{2n}$.

b) Existe-t-il $2n + 1$ entiers naturels consécutifs $a_0, a_1, ..., a_{2n}$ rangés dans l'ordre croissant, vérifiant : $a_0^2 + a_1^2 + ... + a_n^2 = a_{n+1}^2 + ... + a_{2n}^2$.

c) Existe-t-il $2n + 1$ entiers naturels consécutifs $a_0, a_1, ..., a_{2n}$ rangés dans l'ordre croissant, vérifiant : $a_0^3 + a_1^3 + ... + a_n^3 = a_{n+1}^3 + ... + a_{2n}^3$.

Pour cette quesytion on pourra étudier les variations de la fonction f définie par : $f(x) = (x-n)^3 + (x-n+1)^3 + ... + x^3 - (x+1)^3 - ... - (x+n)^3$, on montrera que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_n vérifiant $3n(n+1) < x_n < 3n(n+1) + 1$.

Exercice 2) concours général, 1998

Soit $U = (u_n)$ vérifiant pour tout entier $n \geqslant 0$ la relation : $u_{n+2} = |u_{n+1}| - u_n$. Démontrer qu'il existe un entier p non nul tel que la relation $u_n = u_{n+p}$ est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 3) concours général, 1990

Soit $U = (u_n)$ la suite de nombres entiers définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = u_n \text{ et } u_{2n+1} = 1 - u_n \end{cases}$.

a) Calculer u_{2003}

b) Déterminer le nombre d'indices n, inférieurs ou égaux à 2003, tels que $u_n = 0$

c) Soit p un entier naturel et $N = (2^p - 1)^2$. Calculer u_N.

Exercice 4) concours général 1996

Soient a un entier naturel impair et b un entier strictement positif. On considère la suite $U = (u_n)$ définie par $u_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} \text{si } u_n \text{ est un entier pair, } u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} \\ \text{sinon } u_{n+1} = u_n + a \end{cases}$

a) Démontrer qu'on peut trouver un entier n tel que $u_n \leq a$.

b) Démontrer que la suite est périodique à partir d'un certain rang.