Tétraèdres orthocentriques

Dans un tétraèdre, les hauteurs (droites passant par un sommet et perpendiculaires à la face opposée) ne sont pas forcément concourantes. Le but du problème est d'étudier ceux pour lesquels c'est le cas, dits tétraèdres orthocentriques.

Première partie

Soit ABCD un tétraèdre orthocentrique, d'orthocentre H. On désigne par H_A, H_B, H_C et H_D les projetés orthogonaux respectifs de A, B, C, D sur les faces opposées.

Montrer que les points A, B, H_A, H_B sont coplanaires. Montrer que leur plan est perpendiculaire à (CD), et en déduire que H_A est sur la hauteur issue de B du triangle BCD. En déduire que les points H_A, H_B, H_C et H_D sont les orthocentres des faces auxquelles ils appartiennent. Montrer en outre que les arêtes opposées (AB) et (CD), (AC) et (BD), (AD) et (BC) sont deux à deux orthogonales.

Deuxième partie

Soit maintenant ABCD un tétraèdre dans lequel les arêtes (AB) et (CD) d'une part, (AC) et (BD) d'autre part, sont orthogonales. On désigne cette fois par H_A, H_B, H_C et H_D les orthocentres respectifs des faces BCD, ACD, ABD et ABC.

Montrer que (AH_A) est orthogonale à (CD) et à (BD), en déduire que H_A est le projeté orthogonal de A sur (BCD), et en déduire que (AD) est orthogonale à (BC).

Montrer que les plans (ABH_A) et (ABH_B) sont parallèles, puis confondus. En déduire que les droites (AH_A) et (BH_B) sont sécantes, puis que les quatre hauteurs du tétraèdre ABCD sont concourantes.

Intermède

Enoncer un théorème résumant les deux premières parties.

Troisième partie

Soit ABCD un tétraèdre orthocentrique. On désigne par I, J, K, L, M, N les milieux respectifs de [AB], [AC], [AD], [CD], [BD], [BC]. Montrer que IJLM, IKLN, JKMN sont trois rectangles de centre l'isobarycentre O de ABCD. Montrer que les segments [Il], [JM] et [KN] ont même longueur a, et que $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 = 4a^2$.

Quatrième partie

1) Montrer qu'un tétraèdre régulier est orthocentrique.
2) Montrer qu'un trièdre orthogonal (c'est à dire un tétraèdre OABC où (OA), (OB), (OC) sont deux à deux orthogonales) est orthocentrique.
3) Si ABC est un triangle d'orthocentre H, et que S est un point de la perpendiculaire au plan (ABC) passant par H, montrer que le tétraèdre SABC est orthocentrique. Montrer qu'on obtient ainsi tous les tétraèdres orthocentriques.

Ouf !

Correction du DM : Tétraèdres orthocentriques.

Remarque d'ordre général : quand plusieurs démonstrations se font de la même manière en permutant le nom des points, il n'en sera fait qu'une seule, et on se contentera de préciser les résultats analogues.

Première partie

Les droites (AH_A) et (BH_B) sont par hypothèse sécantes en H. Elles forment le plan (ABH) qui contient les 4 points A, B, H_A, H_B.
D'autre part, (AH_A) est orthogonale à (BCD), dont à toute droite de ce plan, donc à (CD). De même, (BH_B) est orthogonale à (ACD), donc à (CD). Les deux sécantes (AH_A) et (BH_B) du plan (ABH) sont orthogonales à (CD), donc tout le plan (ABH) est orthogonal à (CD). On en déduit déjà que (AB) est orthogonale à (CD). D'autre part, (BH_A) est aussi orthogonale à (CD). Comme c'est une droite du plan (BCD), elle est même perpendiculaire à (CD). Ainsi H_A est sur la hauteur issue de B du triangle BCD.
EN considérant les droites (AH_A) et (CH_C), on montrerait de même que H_A est sur la hauteur issue de C du triangle BCD, et donc H_A est l'orthocentre de BCD. On montrerait aussi que (AC) est orthogonale à (BD).
En permutant les quatre points A, B, C et D (ce qui est licite car les hypothèses de l'énoncé sont identiques pour les quatre points), on montrerait de même que les points H_B, H_C, H_D sont les orthocentres respectifs de ACD, ABD, ABC ; et que (AD) est orthogonale à (BC).

Deuxième partie

On peut remarquer que les hypothèses de l'énoncé ne sont cette fois pas symétriques : il manque l'orthogonalité entre (AD) et (BC)
H_A est cette fois l'orthocentre de (BCD), donc (BH_A) est orthogonale à (CD). On a par hypothèse que (AB) est orthogonale à (CD). Les deux sécantes (AB) et (BH_A) étant orthogonales à (CD), le plan (ABH_A) est orthogonal à (CD), donc (AH_A) est orthogonale à (CD).
De même, (CH_A) et (AC) étant orthogonales à (BD), (AH_A) est orthogonale à (BD).
(AH_A) est ainsi orthogonale au plan (BCD) car elle est orthogonale aux deux sécantes (BC) et (BD). Comme H_A est dans (BCD), il est bien le projeté orthogonal de A sur ce plan.
D'autre par, (DH_A) est orthogonale à (BC), et (AH_A), orthogonale au plan (BCD), est elle aussi orthogonale à (BC). Il en résulte que (BC) est orthogonale au plan (ADH_A), donc que (BC) et (AD) sont orthogonales.
Les hypothèses de l'énoncé sont bien maintenant symétriques, et on peut refaire les démonstrations précédentes pour prouver que les points H_B, H_C et H_D sont les projetés orthogonaux respectifs des points B, C et D sur les faces opposées.
On a déjà prouvé que le plan (ABH_A) était orthogonal à (CD). Il en est de même de (ABH_B), car (AH_B) est la hauteur issue de A du triangle (ACD), donc est orthogonale à (CD), et que (AB) est orthogonale à (CD) par hypothèse. Les deux plans (ABH_A) et (ABH_B), orthogonaux à une même droite, sont parallèles. Comme ils ont le point A en commun, ils sont confondus.
Les droites (AH_A) et (BH_B) sont donc coplanaires. Elles sont respectivement orthogonales aux plans (BCD) et (ACD), qui ne sont pas parallèles. Elles ne sont donc pas parallèles, donc elles sont sécantes, en un point que nous nommerons H.
Remarque : une permutation circulaire des 4 points montrerait ici que deux hauteurs quelconques sont sécantes, mais ça ne suffit pas à montrer que les 4 hauteurs sont concourantes. On s'en tire en disant que 3 de ces droites ne peuvent pas être coplanaires, donc qu'elles sont effectivement concourantes (c'est un exercice de la feuille «espace»).

Il ne reste plus qu'à dire que ces droites sont effectivement les hauteurs du tétraèdre car on a prouvé que les points H_A, H_B, H_C et H_D sont les projetés orthogonaux respectifs des points A, B, C et D sur les faces opposées.
On peut aussi montrer que H est sur (CH_C) : Les plans (ACH_A) et (ACH_C) sont tous les deux orthogonaux à (BD) (on le prouve comme ci-dessus), ils sont donc parallèles, et confondus car ils ont le point A en commun. Ce plan contient les points H (sur (AH_A)), C et H_C. De même, les plans (BCH_B) et (BCH_C) sont confondus, et contiennent les points H, C et H_C. Ces trois points sont donc alignés puisqu'ils appartiennent à deux plans distincts. On prouverait de même que H est sur (DH_D), puis on termine comme précédemment.

Intermède :

Théorème : Dans un tétraèdre orthocentrique, chaque sommet se projette sur la face opposée en son orthocentre, et les paires d'arêtes opposées sont orthogonales. Réciproquement, si dans un tétraèdre deux paires d'arêtes opposées sont orthogonales, il est orthocentrique.

Troisième partie :

I est le milieu de [AB], J celui de [AC], donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. De même, $\overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et IJLM est un parallélogramme. D'autre part, $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc notre parallélogramme a un angle droit, puisque (AD) est orthogonal à (BC). C'est donc un rectangle. On fait de même pour IKLN et JKMN. Ces rectangles ont deux à deux une diagonale commune, ils ont donc le même centre. Appelons le O : O est le milieu de [IL], donc $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OL} = \vec{0}$. D'autre part, I et L sont les milieux respectifs de [AB] et [CD], donc $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ et $\overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. On obtient bien $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ et O est l'isobarycentre de ABCD.
Les trois segments [IL], [KM] et [JM] sont deux à deux des diagonales de rectangles, ils ont donc la même longueur, appelons la a. On a $AB^2 + CD^2 = 4JN^2 + 4JK^2$ (théorème des milieux avec J et N milieux de [AC] et [BC], J et K milieux de [AC] et [AD]), et d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 + CD^2 = 4NK^2 = 4a^2$.
On procède de même pour les autres sommes.

Quatrième partie :

1) Si ABCD est un tétraèdre régulier, on a AB=AC=AD=BC=BD=CD, donc en particulier A et D sont tous deux sur le plan médiateur de [BC], et donc (AD) est orthogonale à (BC). De même, (AC) est orthogonale à (BD) et (AB) est orthogonale à (CD), et notre tétraèdre est orthocentrique d'après le théorème de l'intermède.
2) (OA) est orthogonale à (OB) et (OC), donc au plan (OBC) : c'est donc la hauteur issue de A. De même, (OB) et (OC) sont les hauteurs issues respectivement de B et C. Quant à la hauteur issue de O, elle passe par O. Les 4 hauteurs du tétraèdre sont concourantes en O, qui est donc son orthocentre.
3) La droite (SH) est orthogonale à (ABC) donc à (AB), (AC) et (BC). On a aussi que (AH) est orthogonale à (BC), donc le plan (SAH) est orthogonal à (BC), donc (SA) est orthogonale à (BC). De même, (SB) est orthogonale à (AC) et (SC) est orthogonale à (AB), et notre tétraèdre est orthocentrique. Comme d'autre part, dans un tétraèdre orthocentrique, chaque sommet se projette sur la face opposée en son orthocentre, on a ainsi tous les tétraèdres orthocentriques.