# Lycée Louis-Le-Grand

## Test pour l'entrée en classe préparatoire MPSI

## Durée de l'épreuve : 4 heures

* * *

*Les exercices ci-après sont indépendants les uns des autres, concernent différents thèmes et peu-nt être abordés dans un ordre quelconque. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.*

1. Résoudre l'équation $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1$.

2. Déterminer tous les triplets $(a, b, c)$ d'entiers naturels non nuls, tels que $\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

3. Trouver le plus petit réel $k > 0$ tel que $(a+b+c)^2 \leq k(a^2+b^2+c^2)$ pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

4. Soit $z$ un nombre complexe de module 1. Montrer que soit $|1+z| \geq 1$, soit $|1+z^2| \geq 1$.

5. Un tournoi de ping-pong comporte $2n$ joueurs, $n \geq 1$. Pour la première ronde du tournoi on doit apparier les joueurs deux par deux, les $n$ matchs étant joués simultanément. De combien de manières différentes est-il possible d'organiser cette première ronde ?

6. Trouver tous les entiers naturels $x, y$ vérifiant $x + y = 56$ et ppcm $(x, y) = 105$.

7. Soit $A, B, C, D$ un tétraèdre régulier de côté 1. Quel est le rayon de la sphère circonscrite à ce tétraèdre ?

8. a. Soit $FF'PP'$ un quadrilatère convexe du plan. Montrer que $FP' + F'P < F'P' + FP$ (la somme des longueurs des diagonales est strictement supérieure à la somme des longueurs de deux côtés opposés).

   b. On place $2n$ points $F_1, ..., F_n, P_1, ..., P_n$ dans le plan de manière à ce que trois quelconques des points ne soient pas alignés. Montrer qu'il est possible de relier chaque point $F_k$ à l'un des points $P_1, ..., P_n$ de manière à ce que les $n$ segments ainsi tracés ne se coupent pas (en particulier chaque point $P_i$ doit être relié à un unique point $F_k$).

* * *