

刘 天 LIU Tian

Entrée en classes préparatoires, lycée Louis le Grand

Les six exercices sont indépendants, il est souhaitable que les exercices soient rédigés sur des copies distinctes.

Durée de l'épreuve : quatre heures.

Exercice 1.

Résoudre l'équation :

$$\sin x + \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

Exercice 2.

Résoudre, dans les réels, le système d'équations :

$$\begin{aligned}x^3 + 7x^2y - 5y &= 0 \\ y^3 + 7xy^2 - 5x &= 0\end{aligned}$$

Exercice 3.

Deux cercles sont :

- tangents en P et Q à une même droite
- sécants en M et N

Montrer que les aires des triangles PMN et QMN sont égales.

Exercice 4.

Trouver toutes les applications bijectives de l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} dans lui-même, qui vérifient :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} : \quad f(n) \leq n$$

Exercice 5.

$E(x)$ désigne la partie entière du réel x , à savoir l'unique entier n vérifiant :

$$n \leq x < n+1$$

Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$E(\sqrt[3]{7n+2}) = E(\sqrt[3]{7n+3})$$

Exercice 6.

Trouver un ensemble A constitué de 10 entiers strictement positifs vérifiant la propriété suivante : pour tout sous ensemble de A constitué de six éléments la somme de ces six éléments n'est pas divisible par six.

Dans la question précédente peut-on remplacer 10 par 11 ?
