Lycée Louis le Grand
Entrée en classes préparatoires MPSI
Durée de l'épreuve : 4 heures 30 minutes
Les calculatrices ne sont pas autorisées

Problème 1

Montrer que pour tout réel a et pour tout réel x on dispose des inégalités :

$$a - a^2 \leq 1/4 \quad \text{et} \quad a(1-x)^2 + (1-a)x^2 \geq a - a^2$$

Problème 2

Soit l'équation : $z^5 = 1$

1) Résoudre dans C cette équation et réprésenter les images de ses solutions dans le plan complexe
2) Montrer : $\cos 2\pi/5 + \cos 4\pi/5 = -1/2$
3) Montrer que $\cos 2\pi/5$ est solution de l'équation : $4x^2 + 2x - 1 = 0$; en déduire la valeur de $\cos 2\pi/5$

Problème 3

Dans le plan on se donne deux cercles sécants et on désigne par M et N les points d'intersection de ces deux cercles. Une tangente commune à ces deux cercles les touche respectivement en P et Q. Montrer que les triangles MNP et MNQ ont même aire.

Problème 4

1) Soit n un entier naturel congru à 3 modulo 4. Montrer que n admet un diviseur premier congru à 3 modulo 4
2) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Problème 5

Trois urnes contiennent des billes et chaque urne est suffisammenr grande pour contenir la totalité des billes. On autorise l'opération suivante : doubler le nombre de billes dans une urne en prélevant les billes nécessaires dans une des autres urnes.

Montrer qu'il est possible, par une succession d'opérations, d'obtenir, quelle que soit la configuration initiale, une situation dans laquelle une des urnes est vide.

Problème 6

Montrer que, pour tout entier $n \leq 1$, le réel :

$$(1/2^n).\,(3 + (17)^{1/2})^n + (1/2^n).\,(3 - (17)^{1/2})^n$$

est un entier impair.