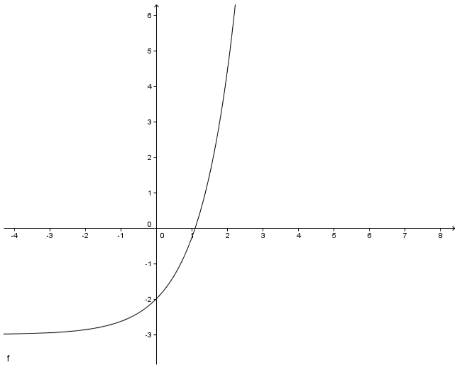
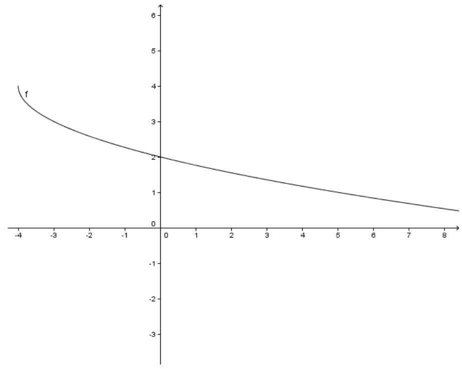
Les fonctions

I Variation

1. Sens de variation



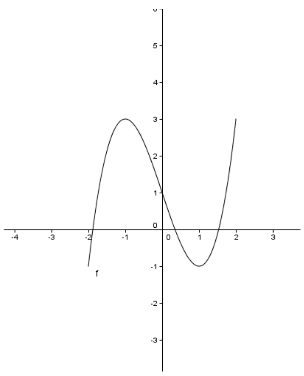
La fonction *f* est croissante



La fonction *f* est décroissante.

2. Tableau de variation

   Il résume le sens de variation de *f* :

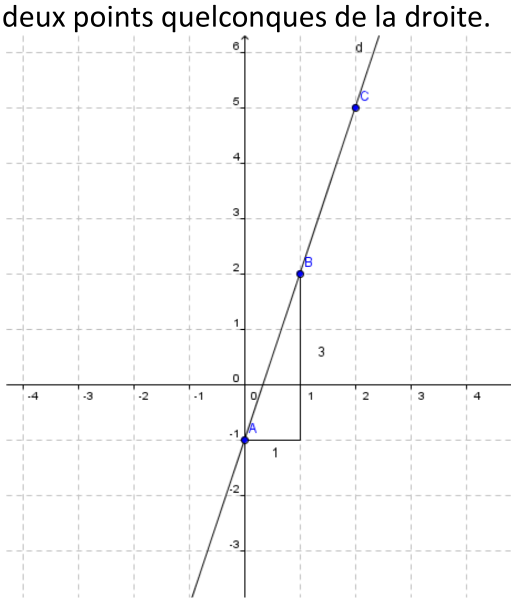


x	-2		-1		1		2
$f(x)$	-1	↗	3	↘	-1	↗	3

II Dérivée

1. Coefficient directeur de droites

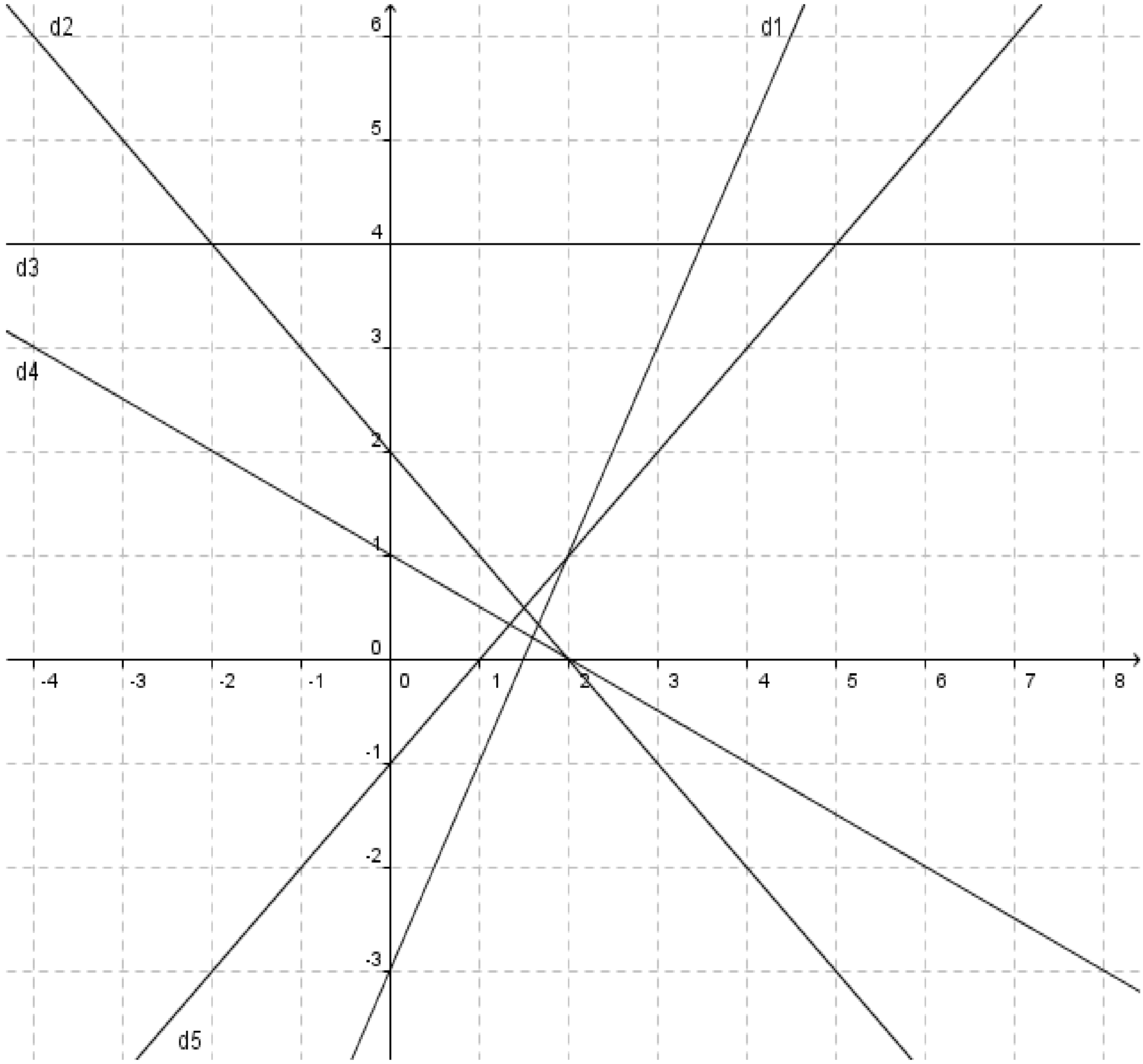
   Le coefficient directeur d'une droite est donné par la formule $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ en prenant deux points quelconques de la droite.



$a = \frac{2-(-1)}{1-0} = 3$ ou $a = \frac{5-2}{2-1} = 3$ ou $a = \frac{5-(-1)}{2-0} = 3$.

Dans la pratique, on regarde de combien on monte, de combien on avance, et on fait la division.

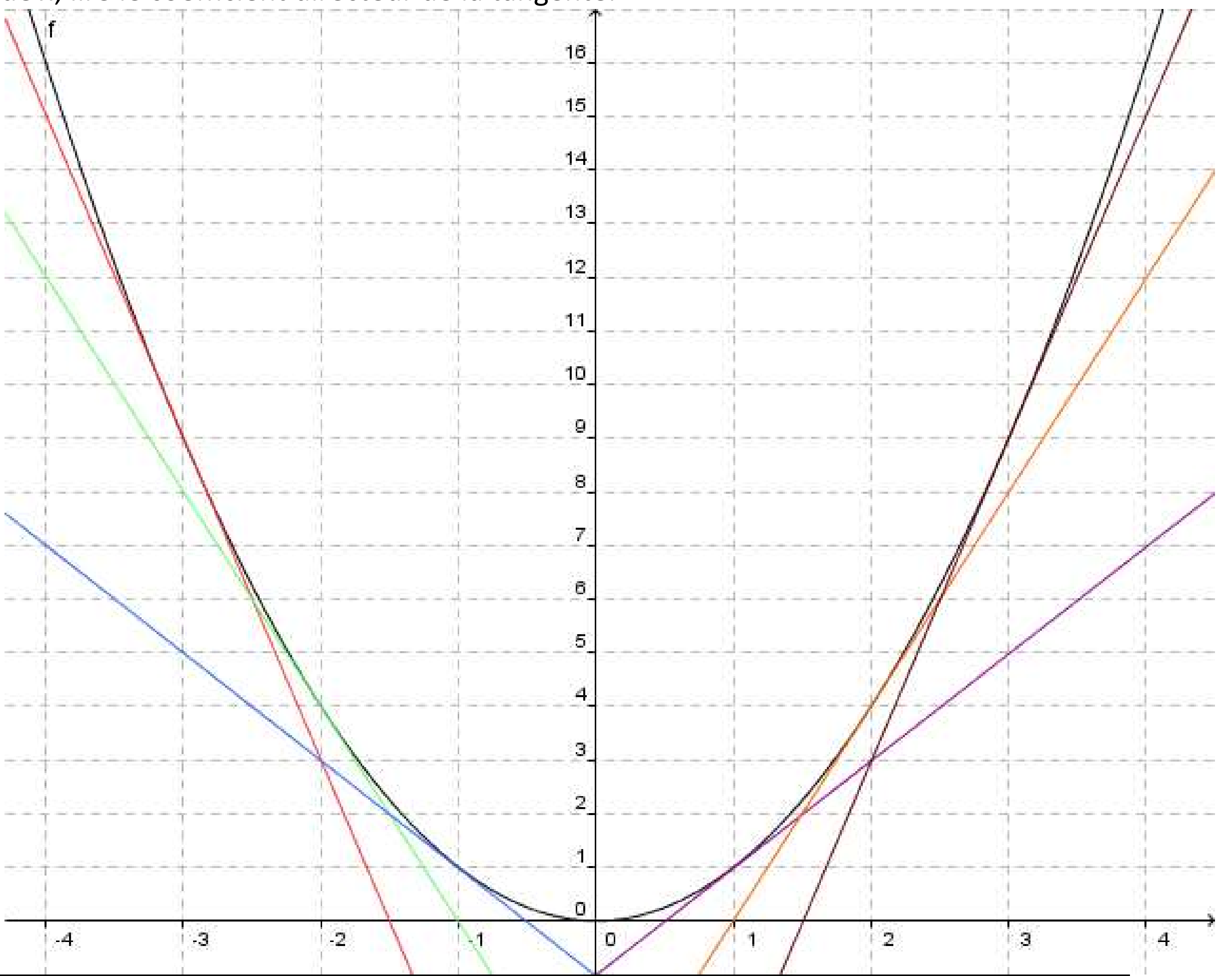
Calculer le coefficient directeur des droites suivantes



Droite	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
Coefficient					

2. Tangentes

   On a tracé la courbe de la fonction $f(x) = x^2$ avec ses tangentes. Pour chaque valeur de *x*, lire le coefficient directeur de la tangente.



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
coefficient							

   Que remarque-t-on ?

3. Dérivée

   C'est la fonction qui, pour chaque réel x donne le coefficient directeur de la tangente. Si la fonction s'appelle f, sa dérivée est f'. On a le tableau suivant :

Fonction	Constantes	x	$ax+b$	x^2	x^3	$\frac{1}{x}$
Dérivée	0	1	a	$2x$	$3x^2$	$\frac{-1}{x^2}$

4. Calculs de dérivées

   Il ne reste plus qu'à appliquer les formules :

   La dérivée de $f(x) = 4x - 5$ est $f'(x) = 4$

   La dérivée de $f(x) = x^2 - 3x - 4$ est $f'(x) = 2x - 3$.

   La dérivée de $f(x) = 5x^2 + x$ est $f'(x) = 5 \times 2x + 1 = 10x + 1$

   La dérivée de $f(x) = 4x^3 + \frac{1}{x}$ est $f'(x) = 4 \times 3x^2 - \frac{1}{x^2} = 12x^2 - \frac{1}{x^2}$

Exercice : Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$f(x) = 2x - 7$

$g(x) = \frac{1}{x} - 3x + 1$

$h(x) = x + x^2 - x^3$

$k(x) = 0{,}2x^2 - 3x$

5. Dérivée et sens de variation.

On a le théorème :

Si la dérivée de f est positive, alors f est croissante, et si la dérivée est négative, alors f est décroissante.

Pour utiliser ce théorème : on calcule la dérivée, on regarde le signe de cette dérivée (parfois il dépend de la valeur de x), et on fait le tableau de variation.

Exemple : $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$ a pour dérivée $f'(x) =$

On cherche le signe de la dérivée :

$4x - 8 \geq 0$ équivaut à $4x \geq 8$ soit $x \geq 2$

$4x - 8 \leq 0$ équivaut à $4x \leq 8$ soit $x \leq 2$.

On a donc le tableau :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-3	$\nearrow$	

Exercice : (Bac STG, la Réunion 2007, extrait)

Une entreprise produit des appareils électroménagers. Le coût horaire de production de *x* appareils est donné en euros par $C(x) = x^2 + 50x + 100$, où $5 \leq x \leq 40$.

Chaque appareil est vendu 100 €.

a) Expliquer pourquoi le bénéfice horaire réalisé pour la vente de *x* objets est égal à la fonction *B* définie par $B(x) = -x^2 + 50x - 100$ pour $5 \leq x \leq 40$.

b) Calculer la dérivée B' de *B* et étudier le signe de B'.

c) Dresser le tableau de variation de *B*.

Quel est le nombre d'appareils à produire pour que le bénéfice horaire soit maximal ?

III Lectures graphiques

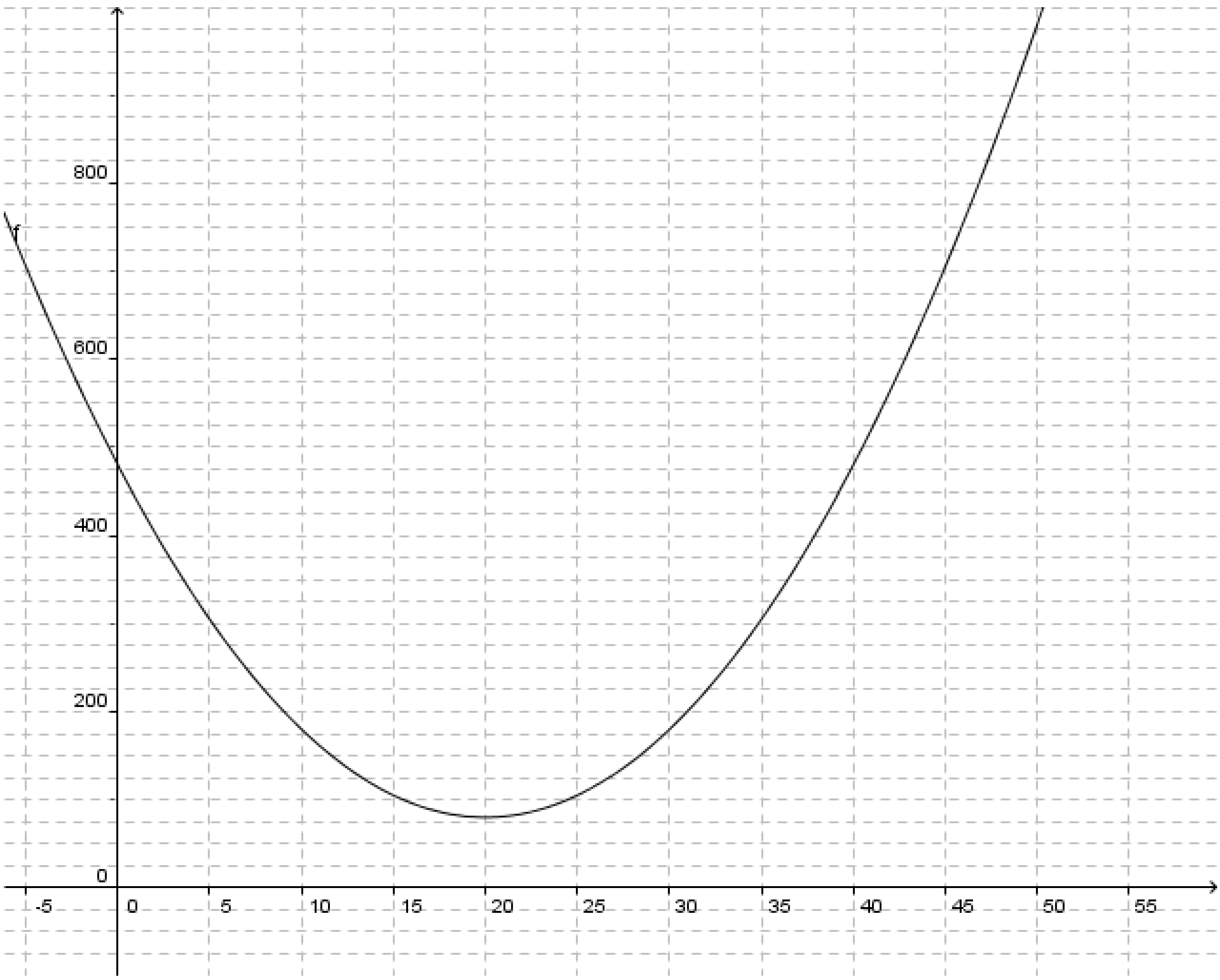
Dans la plupart des cas, la fonction f représente une grandeur (souvent un bénéfice, mais ça peut être autre chose). La principale difficulté dans ce genre de question est de traduire les consignes. Essentiellement, il faut se demander quelle est la variable que l'on connait, quelle est la variable que l'on recherche, et quelle est la condition.

Quelques exemples :

Dans une petite entreprise, la fabrication de x objets impose un coût de production quotidien égal à $f(x)$, où f est la fonction représentée en annexe 1. Chaque objet produit est vendu 12 €, donc la production de x objets rapporte $g(x)=12x$ €. On définit ainsi 2 fonctions f et g.

A l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Quel est le coût de production pour 15 objets produits ?
   Quelle autre quantité produite donne le même coût de production ?
2. Quelle production journalière correspond à un coût de 525 € ?
3. Pour quelle quantité d'objets produits le coût n'excède-t-il pas 305 € ?
4. Représenter sur le graphique la droite d'équation $y=12x$ et déterminer graphiquement combien d'objets doivent être produits pour que l'entreprise soit bénéficiaire.



Un artisan fabrique des terrasses en bois. Il a le choix de s'approvisionner en grande surface de bricolage, au prix de 52 € le m^2, ou dans une scierie, ou le prix du bois est calculé, pour des raisons mystérieuses, par la formule $f(x) = x^3 - 18x^2 + 108x$, *x* désignant le nombre de m^2 achetés.

1. Combien paierait-il en grande surface pour *x* m^2 achetés ?
2. On a représenté en annexe la fonction *f*, ainsi que la fonction *g* définie par $g(x) = 52x$.

   a) Quelle est la courbe de la fonction *g* (justifier sa réponse) ?

   Les questions b, c, d et e seront résolues à l'aide du graphique, et laissant apparents les traits nécessaires.

   b) Déterminer le prix de 10 m^2 de bois achetés en scierie.

   c) Déterminer à quel endroit vaut-il mieux acheter 6 m^2 de bois.

   d) Quelle quantité de bois peut-on acheter pour 400 € dans chaque magasin ?

   e) Pour quelles quantités de bois le prix dans les deux magasins est-il le même ?
3. On appelle *h* la fonction définie par $h(x) = f(x) - g(x)$.

   a) Vérifier que $h(x) = x^3 - 18x^2 + 56x$

   b) Vérifier que $h(x) = x(x-4)(x-14)$.

   c) A l'aide d'un tableau de signe, étudier le signe de *h*(*x*) pour $0 \leq x \leq 16$. En déduire pour quelles quantités de bois il vaut mieux aller à la scierie. Ce résultat était-il prévisible graphiquement ?