

## Devoir surveillé de mathématiques n°1

**Exercice 1 (bac ES, Asie 2008, 8 points)**

Un entreprise produit une quantité  $x$  comprise entre 0 et 20 d'un certain objet.

Le coût total de production  $f$ , exprimé en euros, est représenté par la courbe  $C$  dans le graphique 1 en annexe. La tangente à  $C$  au point  $P$  d'abscisse 14 est tracée sur le même graphique.

1.
  - a. Estimer les coûts fixes et le coût de production de 8 objets ?
  - b. Quelle quantité maximale d'objets est-il possible de produire pour un coût total inférieur ou égal à 150 € ?
2. Le coût marginal  $g$  est donné sur l'intervalle  $[0 ; 20]$  par la dérivée du coût total.
  - a. En utilisant le graphique, déterminez la valeur du coût marginal pour une production de 14 objets. Comparez  $g(14)$  et  $g(19)$ .
  - b. Quelle est, parmi les trois courbes du graphique 2, celle qui représente le coût marginal ? Justifiez votre réponse
3. Le coût moyen  $h$  est donné sur  $]0 ; 20]$  par  $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ .
  - a. Estimez  $h(5)$ .
  - b. Sur le graphique 1, placez le point  $Q$  d'abscisse 3 de la courbe  $C$ , puis tracez la droite  $(OQ)$ . Justifiez que le coefficient directeur de  $(OQ)$  est  $h(3)$ .
  - c. Placez le point  $A$  sur la courbe  $C$  tel que la droite  $(OA)$  soit tangente à  $C$  en  $A$ . On appellera  $a$  l'abscisse de  $A$ . Conjecturez (= essayez de deviner) les variations de  $h$  sur  $]0 ; 20]$ . Toute tentative d'explication sera valorisée.

**Exercice 2 (Une invention de ma part)**

Les deux parties sont, dans une large mesure, indépendantes.

**Partie A (6 points)**

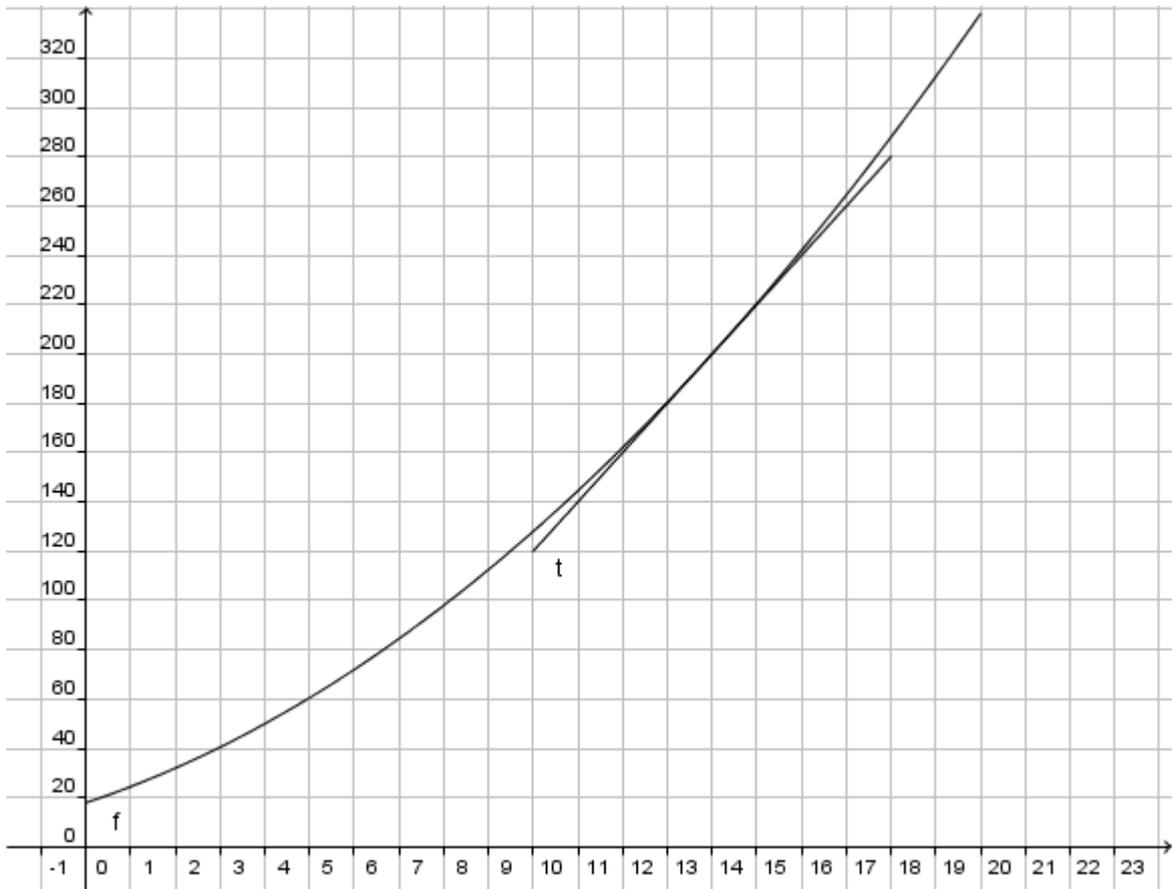
On appelle  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2}$  ( $a, b, c$ ) désignent 3 constantes réelles.

1. On sait que la courbe  $C$  de  $f$  passe par les points  $A(1 ; 1)$  et  $B(2 ; -1)$ . Quelles conditions obtient-on pour  $a, b, c$  ?
2. Calculez la dérivée de  $f$ .
3. La tangente en  $A$  à  $C$  a pour coefficient directeur  $-7$ . Donnez son équation.
4. Quelle condition obtient-on pour  $a, b, c$  ?
5. Déterminez les valeurs de  $a, b, c$ .

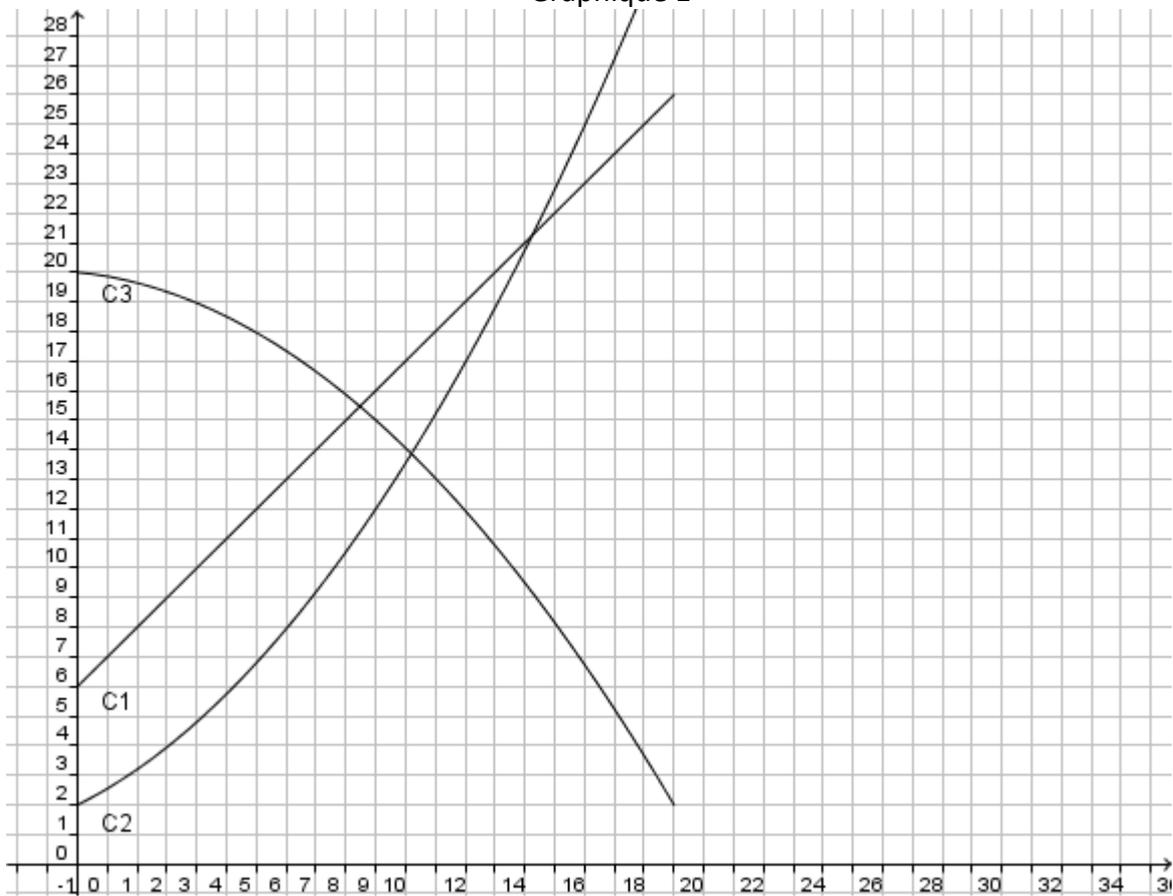
**Partie B (7 points)**

On prendra maintenant  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = x - 4 + \frac{4}{x^2}$ .

1. Calculez la dérivée de  $f$  et vérifiez que  $f'(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$ .
2. Étudiez les variations de  $f$  et dressez son tableau de variation.
3. Tracez la courbe  $C$  représentative de  $f$  (unité : 1 cm) en faisant apparaître les points  $A$  et  $B$  ainsi que les tangentes à  $C$  en ces points.
4. Donnez une primitive  $F$  de  $f$ .
5. À l'aide de la courbe  $C$ , étudiez les variations de  $F$  en expliquant votre méthode.



Graphique 1



Graphique 2