Classe de Terminale ES$_1$ **Lundi 17 octobre 2005**

Devoir de mathématiques n°3

Exercice 1) (Bac ES, Inde 2005, 4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, plusieurs affirmations sont proposées, dont une seule est exacte.

Indiquez sur votre copie le numéro de la question, et la réponse que vous estimez exacte, sans justification. Une bonne réponse est comptée 1point, une réponse fausse est comptée –0,5 point. Ne pas répondre n'ajoute ni n'enlève de point. Si le total des points obtenus à l'exercice est négatif, la note sera 0.

Dans tout l'exercice, *f* est la fonction définie sur $]4;+\infty[$ par $f(x)=-2x+1-\dfrac{8}{x-4}$.

1. Une autre expression de *f*(*x*) est

   a) $f(x)=-2x+1-\dfrac{2}{x-1}$ b) $f(x)=\dfrac{2x^2-9x+12}{4-x}$ c) $f(x)=\dfrac{2x^2+9x-2}{x-4}$

2. Soit *f*' la dérivée de *f*. On a :

   a) $f'(x)=-2-\dfrac{8}{(x-4)^2}$ b) $f'(x)=\dfrac{(2-x)(x-6)}{(x-4)^2}$ c) $f'(x)=\dfrac{-2x^2+16x-24}{(x-4)^2}$

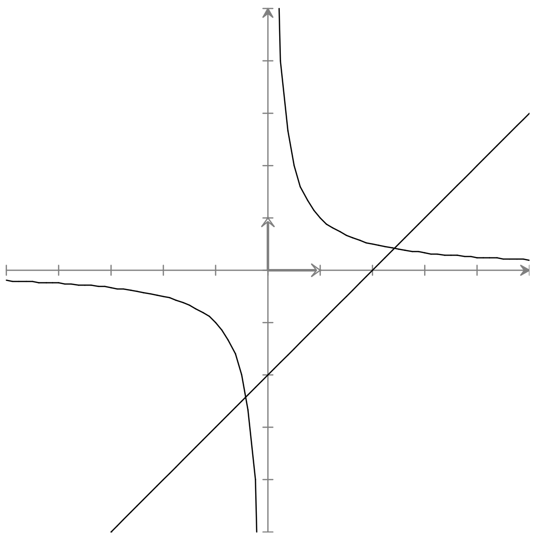
3. La courbe Γ de *f* admet pour asymptote

   a) La droite d'équation $y=4x$ b) La droite d'équation $x=4$ c) La droite d'équation $y=4$

4. La droite d'équation $y=-2x+1$ est

   a) Située en dessous de Γ b) Asymptote à Γ c) Tangente à Γ.

Exercice 2) (Bac ES, Nouvelle Calédonie, 2004, 6 points)



Soit l'équation (E) $\dfrac{1}{x}=x-2$ où l'inconnue x est un réel appartenant à $]0;+\infty[$.

1. Un élève de seconde a représenté sur l'écran de sa calculatrice l'hyperbole d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ et la droite d'équation $y=x-2$.

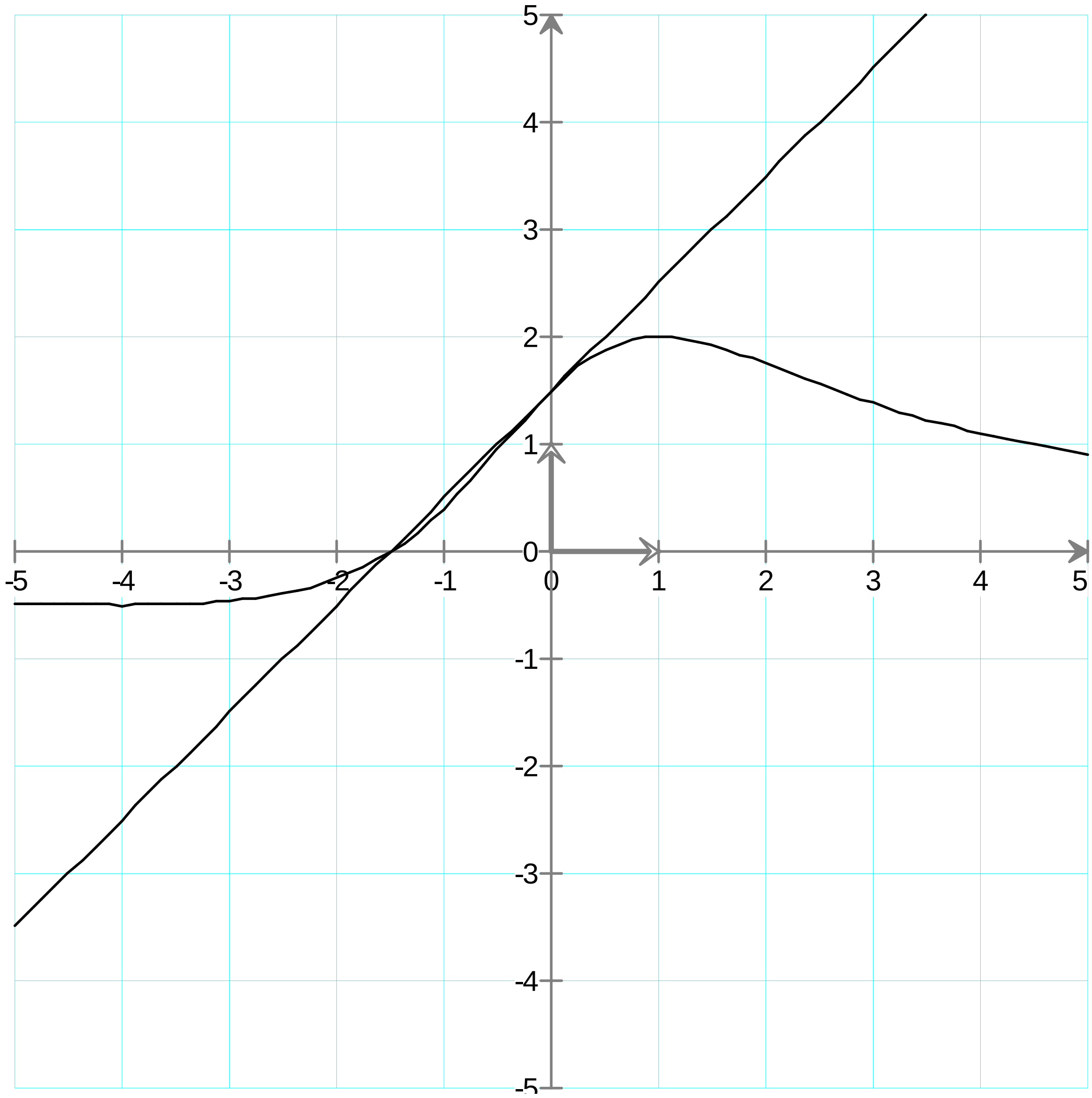
   Au vu de la représentation ci-dessus de l'écran de la calculette, combien l'équation (E) vous semble-t-elle admettre de solutions sur $]0;+\infty[$?

2. Un élève de terminale considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x-2-\dfrac{1}{x}$

   a) Déterminer les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition.
   b) Calculer la dérivée de g et montrer que g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
   c) En déduire le nombre de solutions de (E) et à l'aide de la calculatrice, en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

3. Un élève de première dit « Bon sang, mais c'est bien sûr ! Je peux résoudre algébriquement cette équation. » Résolvez donc algébriquement cette équation.

Exercice 3) (que j'ai inventé tout seul, 10 points)



La courbe ci-dessus est celle d'une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$. La droite a pour équation $y = x + \frac{3}{2}$, elle est tangente à la courbe en son point d'abscisse 0.

1. A l'aide du graphique, donnez les valeurs de :
   $f(1)$ $f(0)$ $f'(1)$ $f'(0)$
2. Déterminer l'expression de $f(x)$ sachant qu'elle est de la forme $f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+4}$.

   Pour toute la suite, on prendra $f(x) = \dfrac{4x+6}{x^2+4}$.
3. Etudier les limites de *f* en $-\infty$ et $+\infty$.
4. Etudier les variations de *f*.
5. On appelle *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+f(x)}}$. Déterminer les limites de *g* en $-\infty$ et $+\infty$, calculer la dérivée de *g* .