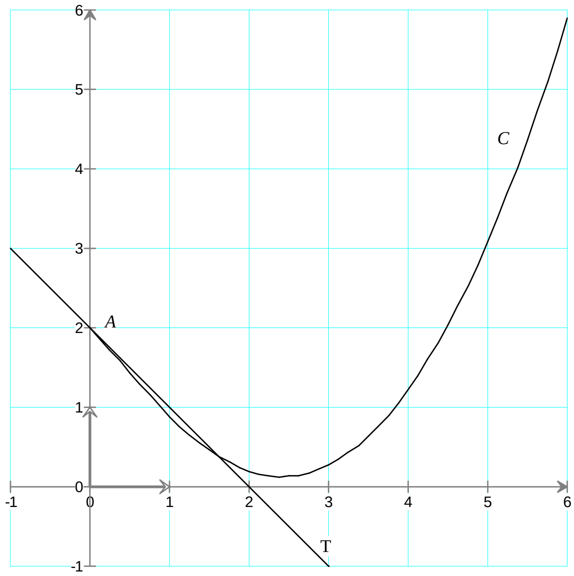
Classe de Terminale ES$_1$ *Jeudi 17 novembre 2005*

Devoir de mathématiques n°5

Exercice 1 (d'après bac ES, Asie, juin 2002, 12 points)
Le but de l'exercice est d'étudier le coût marginal et le coût total de production d'un produit dans une entreprise. L'objet de la partie A est de déterminer une fonction *h* répondant à certaines conditions. L'objet de la partie B est l'étude d'une fonction *f*. L'objet de la partie C est d'appliquer les résultats des parties précédentes à un problème économique.

Partie A
La courbe *C* ci-contre est représentative d'une fonction *h* définie sur $[0\ ;\ +\infty[$. Le point *A* a pour coordonnées (0 ; 2). La droite T est tangente à *C* en *A*.



1. Préciser $h(0)$. A l'aide d'une lecture graphique, déterminer la valeur du nombre dérivé $h'(0)$ (on justifiera sa réponse).
2. La fonction *h* est de la forme $h(x) = ax^2 + bx + c + 2\ln(x+1)$, où *a*, *b*, *c* sont des réels. Exprimer la dérivée h' de *h* en fonction de *a* et *b*.
3. On donne $h'(3) = \frac{1}{2}$. En utilisant ce résultat et ceux de la question 1, déterminer *a*, *b*, *c*.

Partie B

Soit *f* la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 2 + 2\ln(x+1)$.

1. Etudier la limite de *f* en $+\infty$
2. Calculer la dérivée *f'* de *f* et vérifier que $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x+1}$.
3. Etudier les variations de *f*.

Partie C
Sur l'intervalle [0 ; 5], la fonction *f* précédente représente le coût marginal de production en milliers d'euros d'un assouplissant de linge, conditionné en flacons de 1 litre, en fonction de la quantité *x* produite (en milliers de litres). On rappelle que le coût marginal est assimilé à la dérivée du coût total de production.
1. Quel est le coût marginal, en euros, du 3000$^{\text{ème}}$ litre produit ?
2. Pour quelle quantité le coût marginal est-il minimal (on donnera la valeur au litre près) ?
3. Les coûts fixes sont de 1000 €. Montrer que le coût total de production peut être représenté par la fonction *C* définie sur [0 ; 5] par $C(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2(x+1)\ln(x+1) + 1$.
4. Calculer $C(5) - C(0)$ à 1 € près et interpréter en termes de coût cette différence.

Exercice 2 (sorti tout droit de mon cerveau malade, 4 points)
Pour chacune des affirmations précédentes, dites si elle est vraie ou fausse. Une bonne réponse ajoute un demi point, une mauvaise réponse enlève un demi point. Ne pas répondre n'ajoute ni n'enlève de point. Une note négative à cet exercice sera comptée 0. Aucune justification n'est demandée. On présentera ses réponses sous forme d'un tableau.

1. Pour tout réel $x > 0$, $\ln(2x) = \ln(2) \times \ln(x)$.
2. La fonction ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$
3. L'équation $\ln(x+1) + 2\ln(x+3) = \ln(75)$ admet la seule solution 2
4. La courbe de la fonction ln n'admet pas d'asymptote.
5. Pour tout réel $x > 0$, $(\ln x)^3 = \ln(3x)$.
6. On peut calculer $\dfrac{1}{\ln x}$ pour tout $x > 0$.
7. $\ln(\sqrt{e}) = \dfrac{1}{2}$
8. $\ln x$ est toujours positif

Exercice 3 (4 points)

La population française était de 57,75 millions d'habitants en 1995, et de 58,75 millions en 2000.

1. Quel est le taux d'accroissement, en pourcentage, entre ces années (on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près) ?
2. En supposant que les taux de natalité et de mortalité restent constants, expliquer pourquoi la population française serait de $58,75 \times (1,075)^n$ l'année $2000+5n$.
3. En quelle année, suivant cette projection, la population française sera-t-elle égale à 80 millions d'habitants (on expliquera sa méthode)
4. Comment calculerait-on le taux d'accroissement annuel à partir du taux d'accroissement quinquennal ?

Question bonus : dans quel album de Tintin un personnage se fait-il traiter d' « espèce de logarithme ! » ?