Classe de Terminale 5 **Mardi 8 février 2011**

Devoir surveillé de mathématiques n°5

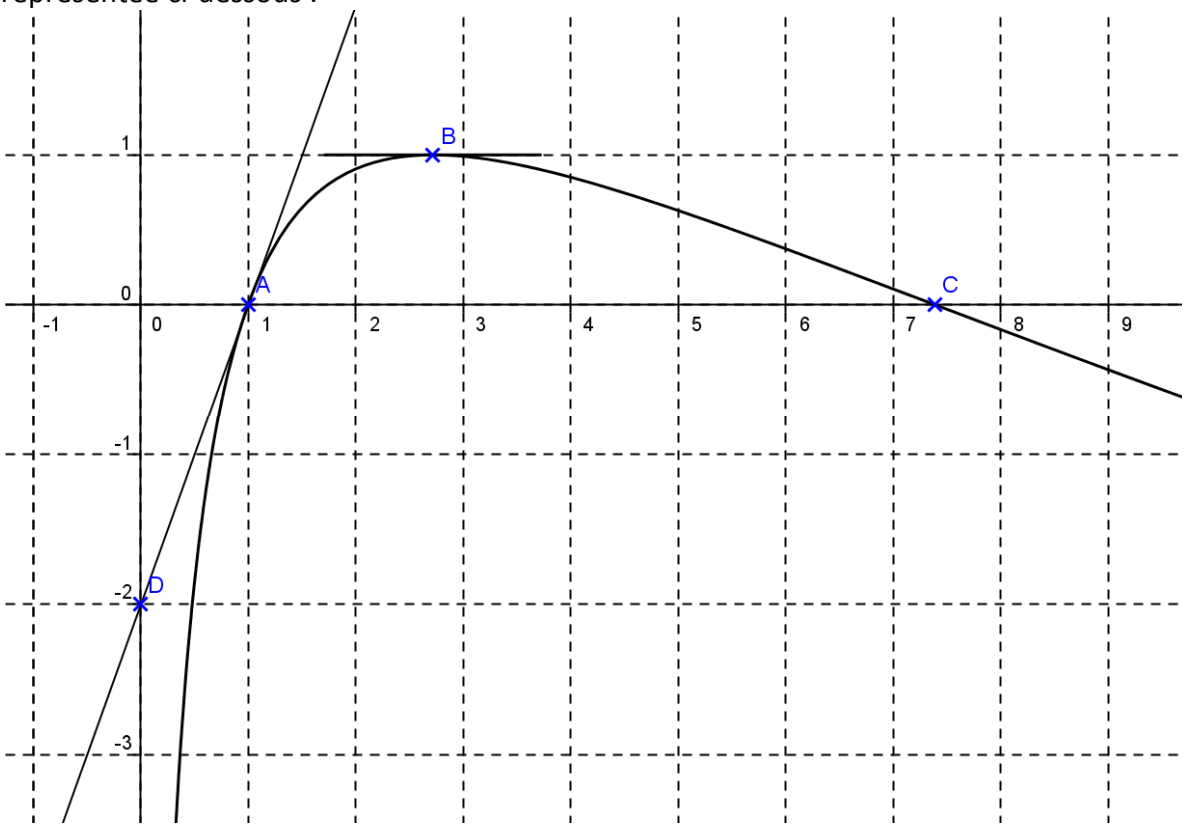
Exercice 1 : 10 points

Les questions sont indépendantes.

1. a. Résoudre dans $\boldsymbol{R}$ l'équation $x^2 + 3x - 4 = 0$.
   b. En déduire la résolution de l'équation $(\ln x)^2 + 3\ln x - 4 = 0$
   c. En déduire la résolution de l'équation $2\ln x = \ln(4 - 3x)$
2. Déterminer le plus petit entier n tel que $1{,}1^n \geq 11$
3. On appelle f la fonction définie sur $\boldsymbol{R}$ par $f(x) = x + \ln(x^2 + 1)$
   a. Calculer sa dérivée et montrer que $f'(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$.
   b. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
   c. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α sur $[0\,;1]$.

Exercice 2 : 10 points

On appelle f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = (2 - \ln x)\ln x$. Sa courbe est représentée ci-dessous :



La courbe coupe l'axe des abscisses en $A(1\,;0)$ et C, la tangente en B est parallèle à l'axe des abscisses, la tangente en A coupe l'axe des ordonnées en D.

1. Déterminer la valeur exacte de l'abscisse de C.
2. Déterminer $\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$
3. Démontrer que $f'(x) = \frac{2-2\ln x}{x}$.
4. En déduire la valeur exacte de l'abscisse de B et de l'ordonnée de D.
5. Soit $g(x) = x[f(x) - 4 + 2\ln x]$. Démontrer que g est une primitive de f.
6. En déduire les variations de g.