

Corrigé du DS n°5

Exercice 1

1. a. Le discriminant vaut $3^2 + 4 \times 4 = 25$, les solutions sont 1 et -4 . (1 point)
 b. Posons $X = \ln x$, nous obtenons $X^2 + 3X - 4 = 0$, équation dont les solutions sont $X = 1$ et $X = -4$. Revenons à x car $X = \ln x$: $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ et $\ln x = -4 \Leftrightarrow x = e^{-4}$ (ou $x = \frac{1}{e^4}$). (1,5 point)
- c. L'équation est définie si $x > 0$ et $4 - 3x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{4}{3}$. L'ensemble de définition est $]0 ; \frac{4}{3}[$. L'équation s'écrit $\ln(x^2) = \ln(4 - 3x)$, équivalente à $x^2 = 4 - 3x$ soit $x^2 + 3x - 4 = 0$. Elle a déjà été résolue, ses solutions sont 1 et -4 , mais la seule solution appartenant à l'ensemble de définition est 1. (2 points)
2. La fonction $\ln$ est strictement croissante, l'inéquation s'écrit donc $\ln(1,1^n) \geq \ln(11)$, soit $n \ln(1,1) \geq \ln(11)$ et $n \geq \frac{\ln(11)}{\ln(1,1)}$. Or $\frac{\ln(11)}{\ln(1,1)} \approx 25,2$, le plus petit entier est donc 26. (1,5 point)
3. a. $\ln(x^2 + 1)$ est de la forme $\ln u$, de dérivée $\frac{u'}{u}$, soit $\frac{2x}{x^2+1}$. On a donc $f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2+1}$, et en mettant au même dénominateur on obtient $f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1+2x}{x^2+1}$, et nous reconnaissons l'identité remarquable, on a bien $f'(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$. (2 points)
 b. $f(0) = 0 + \ln(1) = 0$ et $f(1) = 1 + \ln(2)$. (0,5 point chaque)
 c. Comme 1 appartient à l'intervalle $[f(0) ; f(1)]$, que f est strictement croissante (sa dérivée est positive) et continue, l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique sur $[0 ; 1]$ (1 point)

Exercice 2

1. L'abscisse de C est solution de l'équation $f(x) = 0$, qui s'écrit $(2 - \ln x) \ln x = 0$, soit $2 - \ln x = 0$ ou $\ln x = 0$. La première a pour solution e^2 , l'autre 1 qui est l'abscisse de A. L'abscisse de C est donc e^2 . (1 point)
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} 2 - \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ par produit.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ par produit (1 point chaque)
3. f est un produit, donc sa dérivée est $f'(x) = -\frac{1}{x} \ln x + (2 - \ln x) \frac{1}{x} = \frac{-\ln x + 2 - \ln x}{x}$ ce qui vaut bien $\frac{2-2\ln x}{x}$ (2 points)
4. L'abscisse de B est solution de l'équation $f'(x) = 0$, donc $2 - 2\ln x = 0$, équivalente à $\ln x = 1$. Ainsi l'abscisse de B est e . (1 point)
 La tangente en A a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$. Or $f'(1) = \frac{2-2\ln 1}{1} = 2$ et $f(1) = 0$. L'équation de la tangente est donc $y = 2x - 2$, et l'ordonnée de D, qui est l'ordonnée à l'origine de cette tangente, est donc 2. (1 point)
5. Calculons donc $g' : g'(x) = 1[f(x) - 4 + 2\ln x] + x \left[f'(x) + \frac{2}{x} \right]$. On obtient donc :
 $g'(x) = (2 - \ln x) \ln x - 4 + 2\ln x + 2 - 2\ln x + 2 = (2 - \ln x) \ln x$. g est bien une primitive de f (2 points)
6. Ainsi le sens de variation de g est donné par le signe de f : elle est décroissante sur $]0 ; 1[$, croissante sur $]1 ; e^2[$ et décroissante sur $]e^2 ; +\infty[$ (1 point)