Classe de TES$_1$: corrigé du DS 7

Exercice 1)

On dit que *B* est indépendant de *A* si $p_A(B) = p(B)$, soit, d'après la définition des probabilités conditionnelles, $\dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = p(B)$. Cette inégalité s'écrit $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$, soit aussi $\dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A)$, donc, en revenant à la définition des probabilités conditionnelles, $p_B(A) = p(A)$. On a bien prouvé que si *B* est indépendant de *A*, alors *A* est indépendant de *B*.

A l'issue d'une compétition, des sportifs subissent un contrôle antidopage. Malheureusement, d'une part, certains produits dopants ne sont pas détectés, et certains sportifs sont déclarés dopés à tort.

On note pour toute la suite de l'exercice :

D l'événement « le sportif est réellement dopé », $\overline{D}$ l'événement contraire,

C l'événement « le sportif a été contrôlé positif » $\overline{C}$ l'événement contraire

E l'événement « le contrôle a commis une erreur ».

Tout d'abord, on suppose que la moitié des sportifs s'est dopée, et que les événements C et D sont indépendants. De plus la probabilité que le sportif soit déclaré dopé est de 0,2. On a donc $p(D) = 0,5$ et $p(C) = 0,2$.

La probabilité qu'un sportif soit dopé et contrôlé négatif est donc $p(D \cap \overline{C})$, et d'après les hypothèses d'indépendance, elle vaut $p(D)p(\overline{C}) = 0,5 \times (1 - 0,2) = 0,4$.

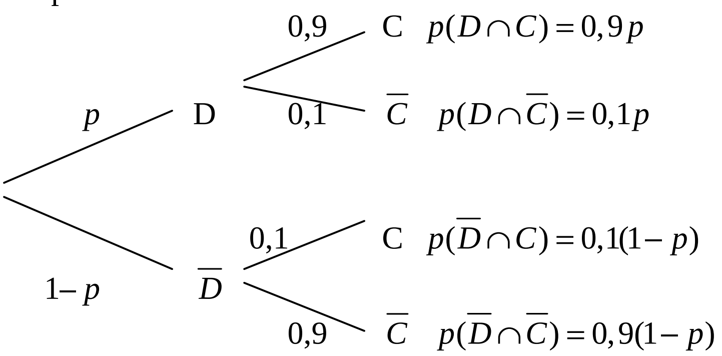
La probabilité qu'il ne soit pas dopé et contrôlé positif est $p(\overline{D} \cap C)$ et, comme ci-dessus elle vaut $p(\overline{D})p(C) = (1 - 0,5) \times 0,2 = 0,1$.

Le contrôle commet une erreur soit quand un sportif dopé est déclaré négatif, soit quand un sportif non dopé est contrôlé positif. Ces deux événements étant incompatibles, on a donc $p(E) = p\left((D \cap \overline{C}) \cup (\overline{D} \cap C)\right) = p(D \cap \overline{C}) + p(\overline{D} \cap C) = 0,4 + 0,1 = 0,5$.

On appelle maintenant *p* la probabilité que le sportif soit dopé, et on suppose que le contrôle fait 10% d'erreurs, c'est-à-dire que 90% des dopés sont contrôlés positifs, et que 10% des non dopés sont contrôlés positifs.

On a donc $p_D(C) = 0,9$, $p_{\overline{D}}(C) = 0,1$, $p(D) = p$.

On peut faire l'arbre suivant :

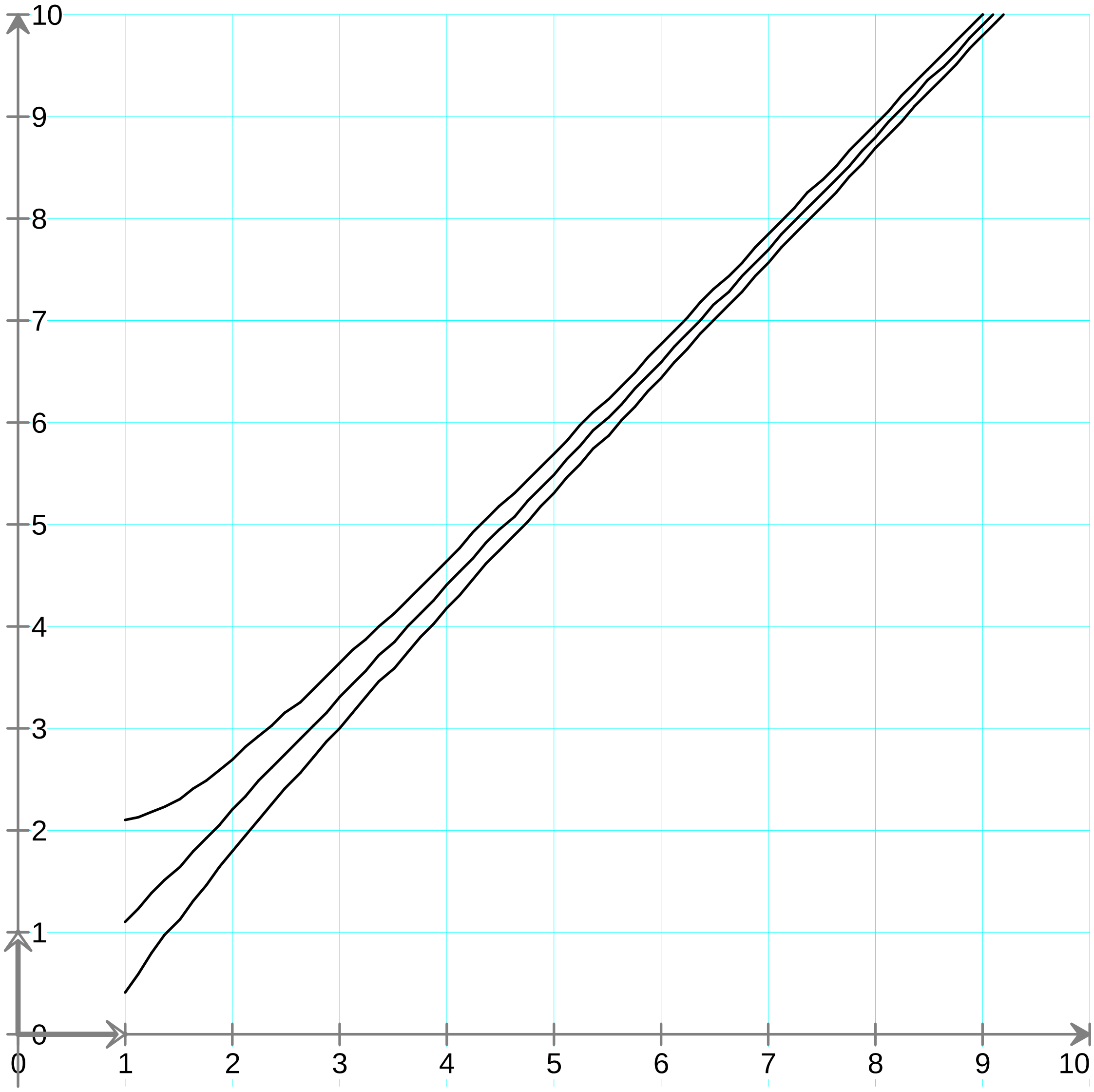


Les événements *D* et $\overline{D}$ forment un système complet d'événements. D'après la loi des probabilités totales, $p(D) = p(D \cap C) + p(\overline{D} \cap C) = 0,9p + 0,1(1 - p) = 0,8 + 0;1$.

On s'intéresse à la probabilité qu'un sportif ayant été contrôlé positif soit réellement dopé. Cette probabilité est $p_C(D)=\dfrac{p(D\cap C)}{p(C)}=\dfrac{0,9p}{0,8p+0,1}$ d'après les résultats précédents. L'inéquation $f(p)\geq 0,9$ s'écrit $\dfrac{0,9p}{0,8p+0,1}\geq 0,9$, soit après simplification $\dfrac{p}{0,8p+0,1}\geq 1$
Comme p est positif, elle est équivalente à $p\geq 0,8p+0,1$, soit $0,2p\geq 0,1$ et $p\geq 0,5$.
Ce résultat s'interprète ainsi : il faut qu'il y ait au moins 50% de sportifs dopés pour que la probabilité qu'un sportif contrôlé positif soit réellement dopé dépasse 0,9

Exercice 2)
La fonction f est définie sur [1 ; +∞[par $f(x)=1{,}1x+\ln(x)-\ln(x+1)$, elle est dérivable et $f'(x)=1{,}1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=1{,}1+\dfrac{(x+1)-x}{x(x+1)}=1{,}1+\dfrac{1}{x(x+1)}$. Comme x est positif, $f'(x)$ est toujours positif et f est croissante.
La fraction $\dfrac{x}{x+1}$ se comporte à l'infini comme le quotient de ses termes de plus haut degré, donc ici comme $\dfrac{x}{x}=1$. On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=1$, et comme $\lim\limits_{X\to 1}\ln X=0$, on a par composition $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=0$. Comme on peut écrire pour tout réel x : $f(x)=1{,}1x+\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$, on a par somme $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}1{,}1x=+\infty$
Comme $f(x)-1{,}1x=\ln(x)-\ln(x+1)=\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$, et qu'on a vu à la question précédente que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=0$, la droite D d'équation $y=1{,}1x$ est asymptote à C_f. Comme pour tout réel positif x, $\dfrac{x}{x+1}<1$, on a $\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)<0$, donc $f(x)-1{,}1x<0$, et C_f est en dessous de D.

La fonction g est définie sur [1 ; +∞[par $g(x)=1{,}1x+\dfrac{1}{x}$, comme $\lim\limits_{x\to+\infty}1{,}1x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, par somme $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$. De plus, $g(x)-1{,}1x=\dfrac{1}{x}$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, donc la droite D est aussi asymptote à C_g. Comme pour tout $x\geq 1$, $\dfrac{1}{x}\geq 0$, C_g est au dessus de D.
La demande est représentée par $g(t)$, l'offre par $f(t)$. Comme C_f est en dessous de D et que C_g est au dessus de D, $g(t)$ est toujours strictement supérieur à $f(t)$. La demande n'est donc jamais satisfaite. Comme en revanche $g(1)-f(1)=1+\ln 2\approx 1,7$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)-f(t)=0$, que $g-f$ est strictement décroissante et continue sur [1 ; +∞[, l'équation $g(t)-f(t)=0,02$ admet une solution unique a, on trouve à la calculatrice $a\approx 100$. On en déduit que la demande ne dépasse l'offre de 20 unités qu'à partir de 100 semaines.


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10