Classe de Terminale S_2

Corrigé de l'exercice 132 page 39 (limites, fonctions)

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $f(x)=\dfrac{x^3-6x^2+13x-10}{x^2-4x+9}$, et la fonction g par $g(x)=\dfrac{4x^2-16x-4}{(x^2-4x+9)^2}$. Le polynôme x^2-4x+9 ne s'annule jamais, ces deux fonctions sont bien définies sur $\mathbb{R}$.

Etude de *g* (partie 1)

On a pour tout réel non nul x : $g(x)=\dfrac{x^2(4-\frac{16}{x}-\frac{4}{x^2})}{x^4(1-\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2})^2}=\dfrac{1}{x^2}\dfrac{4-\frac{16}{x}-\frac{4}{x^2}}{(1-\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2})^2}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ par somme, produit et quotient. De même $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$.

Le calcul donne $g(2)=-\dfrac{4}{5}$. On obtient, à l'aide de l'énoncé, le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		x_1		2		x_2		$+\infty$
$g(x)$	0	↗		↘	$-\frac{4}{5}$	↗		↘	0

D'après ce tableau, 0 et $-\dfrac{4}{5}$ étant strictement supérieurs à –1, $g(x)>-1$ pour tout réel x.

Etude de *f* (partie 2)

Calculons pour tout réel x :

$$x-2+\frac{-4x+8}{x^2-4x+9}=\frac{(x-2)(x^2-4x+9)-4x+8}{x^2-4x+9}=\frac{x^3-4x^2+9x-2x^2+8x-18-4x+8}{x^2-4x+9}$$

$$=\frac{x^3-6x^2+13x-10}{x^2-4x+9}=f(x)$$

D'après ce qui précède, on a pour tout réel x :

$$f'(x)=1+\frac{-4(x^2-4x+9)-(-4x+8)(2x-4)}{(x^2-4x+9)^2}=1+\frac{-4x^2+16x-36+8x^2-16x-16x+32}{(x^2-4x+9)^2}$$

$$=1+\frac{4x^2-16x-4}{(x^2-4x+9)^2}=1+g(x)$$

Comme on a vu à la première partie que pour tout réel x, $g(x)>-1$, on a donc $f'(x)>0$ pour tout x, et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel non nul x, on a :

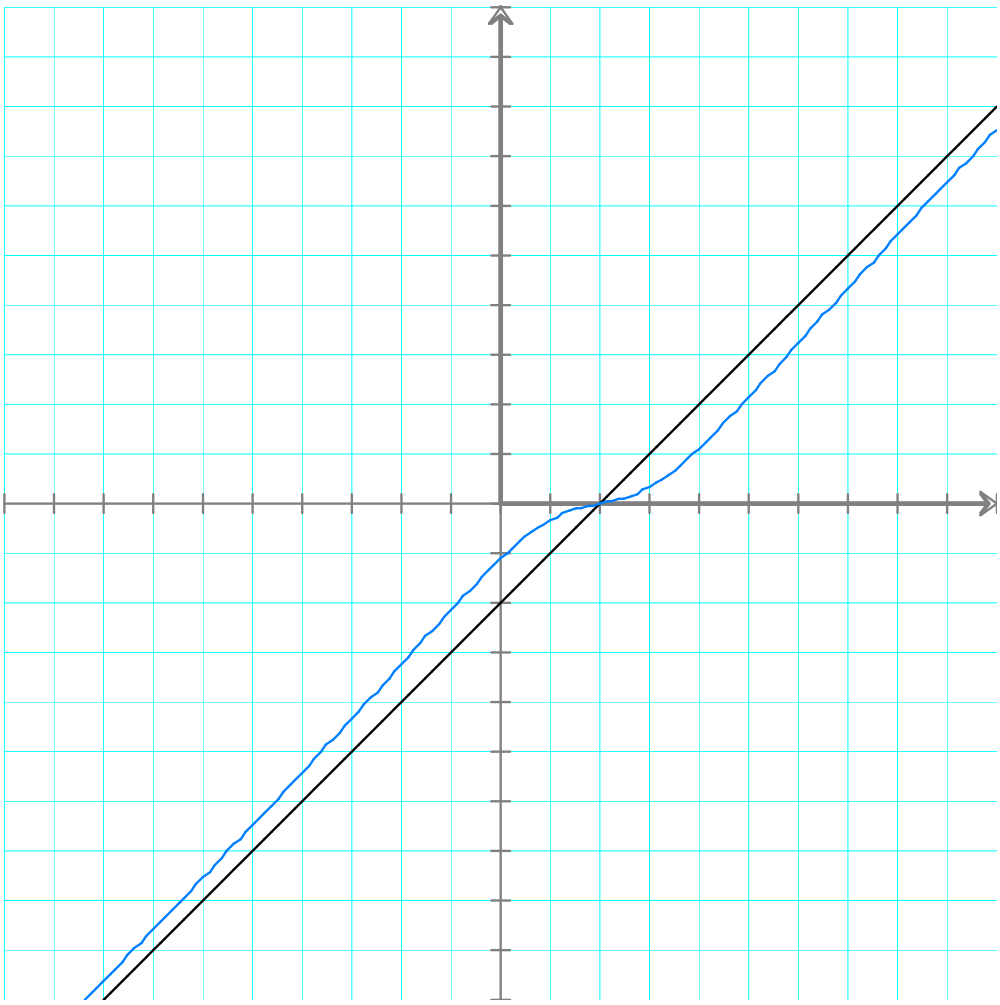
$$f(x)=\frac{x^3(1-\frac{6}{x}+\frac{13}{x^2}-\frac{10}{x^3})}{x^2(1-\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2})}=x\frac{1-\frac{6}{x}+\frac{13}{x^2}-\frac{10}{x^3}}{1-\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2}}.$$ Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ par somme, produit et quotient, et de même $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

Pour tout réel h, $f(2+h)$ et $f(2-h)$ sont définis, et :

$f(2+h)=2+h-2+\dfrac{-4(2+h)+8}{(2+h)^2-4h+9}=h+\dfrac{-4h}{h^2+5}$. On a donc $f(2-h)=-h+\dfrac{4h}{h^2+5}$, et pour tout réel *h*, $f(2+h)+f(2-h)=0$. Le point $A(2\,;0)$ est bien centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

Pour tout réel non nul *x*, $f(x)=x-2+\dfrac{-4x+8}{x^2-4x+9}=x-2+\dfrac{1}{x}\dfrac{-4+\dfrac{8}{x}}{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{9}{x^2}}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\dfrac{-4+\dfrac{8}{x}}{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{9}{x^2}}=0$, et de même $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}\dfrac{-4+\dfrac{8}{x}}{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{9}{x^2}}=0$. On a mis *f*(*x*) sous la forme $f(x)=x-2+h(x)$, et *h* tend vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$. La droite Δ d'équation $y=x-2$ est donc asymptote à $\mathscr{C}$.

Pour étudier leurs positions relatives, on étudie le signe de *h*, qui est le même que celui de $-4x + 8$, car le trinôme x^2-4x+9, de discriminant négatif, est toujours positif. On en conclut que sur $]-\infty\,;\,2]$ *h* est positive et $\mathscr{C}$ est au dessus de Δ, et sur $[2\,;-\infty[$ *h* est négative et $\mathscr{C}$ est en dessous de Δ.

Traçons tout ça (échelle 2 cm non respectée)