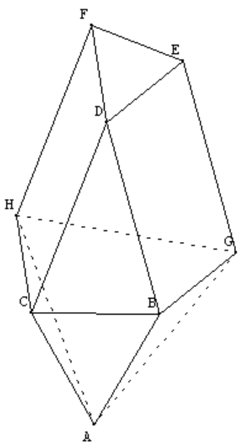
Classe de terminale S$_2$ ***Jeudi 20 janvier 2005***

Devoir de mathématiques n°10

Exercice 1 (d'après bac C, Amiens 1984, 8 points)

1) Pour tout complexe z, montrer que $z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$.
2) On pose $z_0 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$, et $\alpha = z_0 + z_0^4$. Mettre z_0 et z_0^4 en forme exponentielle, en déduire l'expression de α en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$.
3) Montrer que $z_0^4 + z_0^3 + z_0^2 + z_0 + 1 = 0$. En déduire que α est une solution de l'équation $X^2 + X - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.
4) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on appelle A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 les points d'affixes respectives $1, z_0, z_0^2, z_0^3, z_0^4$, et H le point d'intersection de la droite $\left(A_1A_4\right)$ avec l'axe $\left(O, \vec{u}\right)$. Quelle est l'affixe de H ? Le cercle de centre Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ et passant par le point B d'affixe i coupe l'axe $\left(O, \vec{u}\right)$ en deux points M et N (M ayant son abscisse positive). Montrer que l'abscisse de M est $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, en déduire que H est le milieu de [OM], puis une méthode simple de construction d'un pentagone régulier dont on connaît le centre O et un sommet A_0.

Exercice 2 (d'après Bac C, Amérique du Sud, 1992, 7 points)



Dans la figure ci contre, ABC et DEF sont deux triangles équilatéraux direct, $BDEG$ et $CDFH$ sont des parallélogrammes. Le but de l'exercice est de prouver que le triangle AGH est équilatéral.
On appelle a, b, c, d, e, f, g, h les affixes des points A, B, C, D, E, F, G, H.
Première méthode :

Démontrer que $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$.
Exprimer ($f - d$) en fonction de ($e - d$).
En déduire l'expression de g et h en fonction b, c, d, e, f.

Montrer que $h - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(g-a)$, conclure.

Deuxième méthode :

On appelle R la rotation de centre D, d'angle $\frac{\pi}{3}$, t_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$, t_2 la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$. Donner l'expression complexe de R, t_1, t_2.
On appelle T la transformation $T = t_2 \circ R \circ t_1$. Montrer que T est une rotation dont on précisera l'angle (on pourra utiliser les expressions complexes, sans forcément calculer celle de T.
Déterminer $T(B)$ et le centre de T. Déterminer enfin $T(G)$ et conclure.

Exercice 3 (Bac C, centres étrangers, 1991, 5 points)

Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives 1, i, –1, –i.
1) Montrer que le point M d'affixe le nombre complexe $z = re^{i\theta}$ est sur le cercle de centre A et de rayon 1 si et seulement si $r = 2\cos\theta$ ou $r = 0$.
2) Montrer que le produit $P = MA \times MB \times MC \times MD$ est égal à $P = \left|z^4 - 1\right|$.
3) En déduire une condition (portant sur r et θ) pour que P soit égal à 1.
4) Déterminer les points M de l'axe des réels tels que P est égal à 1.
5) Déterminer les points M du cercle de centre O, de rayon 1 tels que P est égal à 1.