Exercice 1°

Développons : $(1-z)(1+z+z^2+z^3+z^4)=1+z+z^2+z^3+z^4-z-z^2-z^3-z^4-z^5=1-z^5$. On aurait pu aussi penser à la somme de la série géométrique $1+q+...+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

On pose maintenant $z_0=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$, on a par définition $z_0=e^{\frac{2i\pi}{5}}$, donc $z_0^4=e^{\frac{8i\pi}{5}}=e^{-\frac{2i\pi}{5}}$ puisque $\dfrac{8\pi}{5}+\dfrac{2\pi}{5}=2\pi$.

On a par conséquent $\alpha=z_0+z_0^4=e^{\frac{2i\pi}{5}}+e^{-\frac{2i\pi}{5}}=2\cos\dfrac{2\pi}{5}$ d'après la formule d'Euler.

D'autre part, $z_0^5=e^{\frac{10i\pi}{5}}=e^{2i\pi}=1$, donc $1-z_0^5=0$, ce qui, d'après la première question, s'écrit $(1-z_0)(1+z_0+z_0^2+z_0^3+z_0^4)=0$, et donc, comme $1-z_0$ n'est pas nul, il reste bien $1+z_0+z_0^2+z_0^3+z_0^4=0$.

Si l'on calcule α^2, on obtient $\alpha^2=(z_0+z_0^4)^2=z_0^2+2z_0^5+z_0^8=z_0^2+z_0^3+2$ puisque $z_0^5=1$. En remplaçant dans l'équation précédente $z_0+z_0^4$ par α et $z_0^2+z_0^3$ par α^2-2, on obtient $1+\alpha+\alpha^2-2=0$, donc α est une solution de $X^2+X-1=0$. Cette équation admet pour solutions les réels $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, mais comme $0<\dfrac{2\pi}{5}<\dfrac{\pi}{2}$, $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ est positif. Comme $\alpha=2\cos\dfrac{2\pi}{5}$, α et positif. Finalement on obtient que $\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Les points A_1 et A_4 ont pour affixes respectives z_0 et $z_0^4=\overline{z_0}$, le point d'intersection de la droite (A_1A_4) avec l'axe $(O,\vec{u})$ est donc le milieu de $[A_1A_4]$, d'affixe $\dfrac{\alpha}{2}=\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

D'autre part, le cercle de centre Ω d'affixe $-\dfrac{1}{2}$, passant par B d'affixe i a pour rayon $R=\Omega B=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{\dfrac{5}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Il coupe l'axe des abscisses aux points d'affixes $-\dfrac{1}{2}-R$ et $-\dfrac{1}{2}+R$, ainsi l'affixe de M est bien $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}=2\cos\dfrac{\pi}{5}$, et H est bien le milieu de $[\Omega M]$.

Pour construire un pentagone régulier connaissant le centre O de son cercle circonscrit et un point A, on fait donc comme ci-dessus : on trace le cercle de centre O passant par A, on nomme C le point diamétralement opposé à A, Ω le milieu de $[OC]$, $[BD]$ le diamètre du cercle perpendiculaire à $[OA]$. Le cercle de centre Ω passant par B coupe le segment $[OA]$ en M, on appelle H le milieu de $[OM]$. H est le projeté de deux points du pentagone, la perpendiculaire à $[OA]$ en H coupe le cercle (de centre O) en deux nouveaux points, puis on reporte les distances au compas pour construire les deux derniers points.

Exercice 2

Première méthode : ABC est un triangle équilatéral direct, donc C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, ce qui s'écrit $c-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$. De même $f-d=e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)$.

$BDEG$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{DB}$, soit $g-e=b-d$ ou $g=b+e-d$. De même $h=c+f-d$. Ainsi $h-a=c-a+f-d=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)+e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a+e-d)$ d'après les questions précédentes.

On obtient finalement que $h-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(g-a)$, ce qui exprime que H est l'image de G par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Le triangle AGH est donc équilatéral.

Deuxième méthode :

t_1 est la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$ d'affixe $d-b$, son expression complexe est donc $z\to z'=z+d-b$. De même t_2, translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$ a pour expression complexe $z\to z'=z+c-d$. Enfin R, rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{3}$, a pour expression complexe $z\to z'=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-d)+d$.

La transformation $T=t_2\circ R\circ t_1$ correspond à :

$M(z)\xrightarrow{t_1}M'(z')\xrightarrow{R}M''(z'')\xrightarrow{t_2}M'''(z''')$. On a $z'''=z''+c-d$, $z''=e^{i\frac{\pi}{3}}(z'-d)+d$, et $z'=z+d-b$. Si on exprime z''' en fonction de z, on obtiendra une expression de la forme $z'''=e^{i\frac{\pi}{3}}z+b$, ainsi T est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Déterminons l'image de B :

Par t_1, translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$, B a pour image D (c'est la définition)

Par R, rotation de centre D, D est invariant.

Par t_2, translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$, D a pour image C.

Ainsi $B\xrightarrow{t_1}D\xrightarrow{R}D\xrightarrow{t_2}D$ et $T(B)=C$. Comme T est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme B et C, son centre ne peut être que A.

Déterminons enfin l'image de G :

$\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{BD}$, donc par t_1, G a pour image E.

Par R, rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{3}$, E a pour image F (DEF est équilatéral direct)

Et comme $\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{DC}$, par t_2, F a pour image H.

Soit $G\xrightarrow{t_1}E\xrightarrow{R}F\xrightarrow{t_2}H$ et $T(G)=H$. Comme T est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, le triangle AGH est équilatéral.

Exercice 3

Le point M d'affixe $z=re^{i\theta}$ est sur le cercle de centre A d'affixe 1 si et seulement si $AM=1$, c'est-à-dire si et seulement si $|z-1|=1\Leftrightarrow|z-1|^2=1$. Or $z-1=r\cos\theta-1+ir\sin\theta$, donc $|z-1|^2=(r\cos\theta-1)^2+(r\sin\theta)^2=r^2\cos^2\theta-2r\cos\theta+1+r^2\sin^2\theta=r^2-2r\cos\theta+1$.

L'équation $\left|z-1\right|^2=1$ s'écrit donc $r^2-2r\cos\theta+1=1 \Leftrightarrow r(r-2\cos\theta)=0$. On obtient bien la condition $r=0$ ou $r=2\cos\theta$.
Le produit $P=MA\times MB\times MC\times MD$ s'écrit aussi $P=\left|z-1\right|\times\left|z-i\right|\times\left|z+1\right|\times\left|z+i\right|$. En utilisant les propriétés des modules, et en regroupant, on obtient :
$P=\left|(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)\right|=\left|(z^2-1)(z^2+1)\right|=\left|z^4-1\right|$
P est égal à 1 si et seulement si $\left|z^4-1\right|=1$, autrement dit si et seulement si le point d'affixe z^4 est situé sur le cercle de centre A et de rayon 1, donc, d'après la question 1 (le module est maintenant r^4 et l'argument 4θ, si et seulement si $r=0$ ou $r^4=2\cos 4\theta$.
Si de plus M est sur l'axe des réels, alors $\theta=0\left[\mathrm{mod}\,\pi\right]$ donc $\cos 4\theta=1$. La condition précédente devient donc $r=0$ ou $r^4=2$, soit $r=\sqrt{\sqrt{2}}$ (un module est positif). Compte tenu des valeurs 0 et π possibles pour θ on trouve trois réels : $0,\sqrt{\sqrt{2}},-\sqrt{\sqrt{2}}$.
Si maintenant M est sur le cercle de centre O, de rayon 1, alors $r=1$. La condition devient alors $\cos 4\theta=\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $4\theta=\frac{\pi}{3}\left[\mathrm{mod}\,2\pi\right]$ ou $4\theta=-\frac{\pi}{3}\left[\mathrm{mod}\,2\pi\right]$, soit en divisant par 4, $\theta=\frac{\pi}{12}\left[\frac{\pi}{2}\right]$ ou $\theta=-\frac{\pi}{12}\left[\frac{\pi}{2}\right]$. On obtient donc 8 affixes :
$e^{i\frac{\pi}{12}},e^{i\frac{7\pi}{12}},e^{i\frac{13\pi}{12}},e^{i\frac{19\pi}{12}},e^{-i\frac{\pi}{12}},e^{i\frac{5\pi}{12}},e^{i\frac{11\pi}{12}},e^{i\frac{17\pi}{12}}$

Figure Exercice 1 :