Classe de terminale S6 **Mardi 25 novembre 2014**

Devoir surveillé de mathématiques n°3

Exercice 1 (8 points)

1. Restitution organisée de connaissances.
   Soient A et B deux événements d'un même univers Ω, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ les événements contraires.
   a) Rappeler la définition de « A et B sont indépendants ».
   b) Montrer que si A et B sont indépendants, il en est de même de $\bar{A}$ et B.
2. Au bac 2010, dans la série S, 45,6% des candidats sont des filles, 90,5% des filles ont été reçues et 46,6% des admis sont des filles. On interroge un candidat au hasard, on note F l'événement « le candidat est une fille » et G son contraire, A l'événement « le candidat est admis » et R son contraire. Les résultats numériques seront données à 10^{-3} près
   a) Traduire les données de l'énoncé à l'aide des événements F et A.
   b) Calculer la probabilité que le candidat soit une fille admise au baccalauréat.
   c) Calculer la probabilité que le candidat soit admis.
   d) Les événements F et A sont-ils indépendants ?
   e) Calculer $p_G(A)$. Énoncer par une phrase cette probabilité.
3. Une classe comporte 18 filles, elles estiment avoir chacune une probabilité 0,9 de réussite, les résultats individuels étant indépendants les un des autres. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'admises.
   a) Quelle est la loi de X (justifier votre réponse) ?
   b) Quelle est la probabilité que toutes les filles soient admises ?
   c) Quelle est la probabilité qu'au moins deux filles soient refusées ?

Exercice 2 (4points)

Il est proposé plusieurs affirmations. Vous devez dire si elles sont vraies ou fausses, avec une justification. Toute réponse non justifiée ne sera pas évaluée. Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On donne trois suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ telles que, pour tout n, $u_n \leq v_n \leq w_n$
   a) Si $\lim v_n = +\infty$ alors $\lim w_n = +\infty$
   b) Si $\lim v_n = +\infty$ alors $\lim u_n = +\infty$
   c) Si $\lim u_n = 0$ et $\lim w_n = 3$ alors (v_n) converge
   d) Si $\lim v_n = +\infty$ alors (v_n) est croissante
   e) Si (u_n) et (w_n) sont bornées, alors (v_n) est bornée
   f) Si (u_n) et (w_n) sont croissantes, alors (v_n) est croissante
2. On donne les fonctions f, g définies par $f(x) = \frac{x^2+x-2}{2x-1}$ et $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+x+1}$.
   a) La courbe de f admet la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ comme asymptote.
   b) La courbe de g admet une asymptote horizontale.
   c) La courbe de f admet une asymptote horizontale.

Exercice 3 (d'après bac S, Amérique du Sud, septembre 2014, 8 points)

On considère la suite définie par $u_0 = 4$, et pour tout entier n, $u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n^2 + \frac{5}{2}u_n - \frac{5}{4}$.

1. Calculez u_1
2. Complétez l'algorithme suivant, qui reçoit en entrée un entier n, et calcule et affiche u_n :

U prend la valeur	**U prend la valeur**
Lire n	Fin pour
Pour k allant de	**Afficher**

3. Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de u_2, u_3, u_4. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de (u_n) ?
4. On pose maintenant, pour tout entier n, $v_n = 5 - u_n$. Démontrer que $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n^2$.
5. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq v_n \leq 1$.
6. Démontrer que la suite (v_n) est décroissante.
7. Démontrer que la suite (v_n) est convergente. Que peut-on dire de sa limite ?
8. On suppose que (v_n) a pour limite 0. Quelle en est la conséquence pour (u_n) ?

Corrigé

Exercice 1

D'après l'énoncé, 45,6 des candidats sont des filles, donc $p(F) = 0{,}456$, 90,5% des filles ont été reçus donc $p_F(A) = 0{,}905$ et 46,6% des admis sont des filles donc $p_A(F) = 0{,}466$. On peut déjà voir que les événements A et F ne sont pas indépendants car $p_A(F) \neq p(F)$.

Il est malcommode de présenter les données dans un arbre, il vaut mieux ici faire un tableau. Les données obtenues seront notées en gras.

Sexe / Résultat au bac	Fille	Garçon	Total
Admis	**0,413**	**0,473**	**0,886**
Refusé			
Total	0,456	**0,544**	1

L'événement : le candidat choisi est une fille admise au bac est $A \cap F$, et $p(A \cap F) = p(F) \times p_F(A) = 0{,}456 \times 0{,}905 = 0{,}41268 \approx 0{,}413$. Pour trouver $p(A)$, on utilise que $p(A \cap F) = p(A) \times p_A(F)$ soit $p(A) = \frac{p(A\cap F)}{p_A(F)}$ soit $p(A) = \frac{0{,}41268}{0{,}466} \approx 0{,}886$. On interroge un garçon, et on veut déterminer la probabilité qu'il soit admis, soit $p_G(A) = \frac{p(A\cap G)}{p(G)}$. Les probabilités $p(A \cap G)$ et $p(G)$ se calculent par différence : $p(G) = 1 - p(F) = 1 - 0{,}456 = 0{,}544$, $p(A \cap G) = p(A) - p(A \cap F) \approx 0{,}886 - 0{,}413 \approx 0{,}473$. On a finalement $p_G(A) \approx \frac{0{,}473}{0{,}544} \approx 0{,}869$

Les résultats des filles sont indépendants, chacune a la même probabilité de réussite. Le nombre X de filles admises suit donc la loi binomiale de paramètres 18 et 0,9. La probabilité que toutes aient leur bac est donc $p(X = 18) = 0{,}9^{18} \approx 0{,}15$. L'événement « au moins 2 échouent » est aussi « au plus 16 réussissent ». Sa probabilité est donc $p(X \leq 16) = 1 - p(X = 17) - p(X = 18)$. $p(X = 18)$ a déjà été calculé, et $p(X = 17) = \binom{18}{17} \times 0{,}9^{17} \times 0{,}1 \approx 0{,}30$.

La probabilité recherchée est donc $1 - 0{,}3 - 0{,}15$ soit environ 0,55.

Exercice 2

Question 1

a) Vrai, c'est le théorème de comparaison, b) Faux, par exemple $u_n = 1$, $v_n = n$, c) Faux, par exemple $u_n = 0, v_n = 1 + (-1)^n, w_n = 3$, d) Faux, par exemple $v_n = n + 3 \times (-1)^n$ (vu en classe), e)Vrai, par le minimum de (u_n) et la maximum de (v_n), f) Faux, par exemple $u_n = n - 5$, $v_n = n + 3 \times (-1)^n$, $w_n = n + 5$.

Question 2

a) Vrai car $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} x^2 + x - 2 = \frac{5}{4}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} 2x + 1 = 0$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \infty$ (tout dépend des signes)

b) Vrai car $g(x) = \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$ donc $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 1$

c) Faux car par la même méthode on trouve que f tend vers l'infini.

Exercice 3

$u_1 = -4 + 10 - \frac{5}{4} = \frac{19}{4}$. Les lignes incomplètes sont : U prend la valeur 4, Pour k allant de 1 à n, U prend la valeur $-\frac{1}{4}U^2 + \frac{5}{2}U - \frac{5}{4}$, Afficher U. On obtient $u_2 \approx 4{,}984375, u_3 \approx 4{,}99993896, u_4 \approx 5$. On peut conjecturer que (u_n) tend vers 5.

$$v_{n+1} = 5 - u_{n+1} = 5 - \left(-\frac{1}{4}u_n^2 + \frac{5}{2}u_n - \frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4}u_n^2 - \frac{5}{2}u_n + \frac{25}{4} = \frac{(u_n - 5)^2}{4} = \frac{1}{4}v_n^2$$

La récurrence est immédiate car quand un nombre x est entre 0 et 1, $\frac{1}{4}x^2$ est aussi entre 0 et1.. $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}v_n^2 - v_n = v_n\left(\frac{1}{4}v_n - 1\right)$ et comme $0 \leq v_n \leq 1$, $v_{n+1} - v_n$ est négatif et la suite (v_n) est décroissante. Elle est minorée par 0, donc elle est convergente vers une limite comprise entre 0 et 1. Si on admet que sa limite est 0, la limite de (u_n)
est 5 par différence, ce qui confirme la conjecture .