Classe de terminale S_5 ***Vendredi 3 avril 2003***

Devoir de mathématiques

N°16

Exercice 1) (bac S, 1995, 5,5 points)

Le but est l'étude de la suite (u_n) définie par $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ et pour $n \geqslant 1$ $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

1) a) Soit *f* la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$.
   Calculer la dérivée *f'* de *f*, en déduire u_0.
   b) Calculer u_1
2) a) Prouver que la suite (u_n) est décroissante (on ne cherchera pas à calculer u_n).
   En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   b) Montrer que pour tout réel *x* appartenant à [0 ; 1] on a : $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$. En déduire que pour tout entier *n* ⩾ 1 on a : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$. Déterminer la limite de (u_n)
3) Pour tout entier *n* ⩾ 3 on pose : $I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$.
   a) Vérifier que pour tout entier *n* ⩾ 3 on a : $u_n + u_{n-2} = I_n$.
   Par intégration par parties sur I_n montrer que pour tout *n* ⩾ 3 on a : $nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$
   b) En déduire que pour tout *n* ⩾ 3 on a $(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$.
   c) Déduire des questions 2) b) et 3) b) que la suite (nu_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2 (bac S, 1997, 4,5 points)

Soit $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ un repère orthonormal direct de l'espace.

1) Soit *G* l'isobarycentre de *A*, *B*, *C*. Donner les coordonnées de *G* et montrer que la droite (*OG*) est perpendiculaire au plan (*ABC*).
2) On considère les points $A'(2;0;0)$, $B'(0;2;0)$, $C'(0;0;3)$.
   a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (*A'B'C'*).
   b) En déduire une équation cartésienne du plan (*A'B'C'*)
   c) Donner un système d'équations paramétriques de la droite (*AC*).
   d) Déterminer les coordonnées du point *K* commun à la droite (*AC*) et au plan (*A'B'C'*).
3) a) Vérifier que le point *L* commun à la droite (*BC*) et au plan (*A'B'C'*) a pour coordonnées $L(0;4;-3)$
   b) Montrer que les droites (*AB*), (*A'B'*), (*KL*) sont parallèles.
   c) Caractériser l'intersection des plans (*ABC*) et (*A'B'C'*) à l'aide de points déjà définis .
4) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de *O* sur le plan (*A'B'C'*).

Problème (bac S, 2001, 10 points)

Les objectifs du problème sont de déterminer la solution d'une équation différentielle (partie A), d'étudier cette solution (partie B) et de la retrouver dans un contexte différent (partie C).

Partie A

On appelle (E) l'équation différentielle $y''-y=0$, où y est une fonction définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1) Déterminer les réels r tels que la fonction h définie par $h(x)=e^{rx}$ soit solution de (E).
2) Vérifier que les fonctions φ définies par $\varphi(x)=\alpha e^{x}+\beta e^{-x}$, où α et β sont deux nombres réels, sont des solutions de (E). *On admettra qu'on obtient ainsi toutes les solutions de (E).*
3) Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe pesse par le point de coordonnées $\left(\ln 2;\dfrac{3}{4}\right)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur $\dfrac{5}{4}$.

Partie B

On appelle f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Soit μ un réel. Montrer que pour tout réel x, $f(x)=\mu$ équivaut à $e^{2x}-2\mu e^{x}-1=0$. En déduire que l'équation $f(x)=\mu$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$ et déterminer sa valeur en fonction de μ.
2) a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

   b) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3) a) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.

   b) En étudiant le sens de variation de la fonction d définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x)=f(x)-x$, préciser la position de T par rapport à $\mathscr{C}$.

   c) tracer T et $\mathscr{C}$ (unité graphique 2cm).
4) Soit D la partie représentant sur le graphique l'ensemble des points M de coordonnées (x ; y) telles que $0\le x\le 1, x\le y\le f(x)$. Hachurer le domaine D, calculer en cm^2 l'aire de D.

Partie C

On cherche à déterminer les fonctions Φ dérivables sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, telles que pour tout réel x : $\Phi(x)-\displaystyle\int_0^x (x-t)\Phi(t)dt = x$ (H)

1) On suppose qu'il existe une telle fonction Φ.

   a) Justifier que pour tout nombre réel x, $\Phi(x)=x+x\displaystyle\int_0^x \Phi(t)dt-\int_0^x t\Phi(t)dt$. Calculer $\Phi(0)$.

   b) Démontrer que pour tout nombre réel x, $\Phi'(x)=1+\displaystyle\int_0^x \Phi(t)dt$. Calculer $\Phi'(0)$.

   c) Vérifier que Φ est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A. Déterminer laquelle, parmi toutes les solutions explicitées dans la question A. 2)
2) a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^x t(e^{t}-e^{-t})dt$.

   b) Démontrer que la fonction trouvée à la question 1.c. vérifie bien la relation (H).