Classe de Terminale S_5 ***Vendredi 30 mai 2003***

Devoir de mathématiques

Bac – 1

Exercice 1) (5 points)

La durée de vie, exprimée en heures, d'une ampoule électrique, est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,002. Dans tout l'exercice, on donnera des résultats en valeur exacte, ainsi qu'une approximation à 3 chiffres significatifs.

1) a) Montrer que la probabilité qu'une ampoule ait une défaillance avant 500 heures est égale à $1-e^{-1}$.
   b) Calculer $P(T>800)$.
   c) Quelle est la probabilité qu'une ampoule n'ayant pas eu de défaillance en 500 heures ait une durée de vie totale supérieure à 1300 heures?
   d) Déterminer l'instant t_0 tel que $P(T<t_0)=\frac{1}{2}$. Interpréter ce résultat.
   e) Calculer l'espérance de T définie par $E(T)=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a 0,002te^{-0,002t}dt$.
2) Dans un lot de 100 ampoules, on note X le nombre d'ampoules qui n'ont pas de défaillance avant 500 heures.
   a) Quelle est la loi de probabilité de X ?
   b) Quelle est la probabilité qu'il y ait 90 ampoules sans défaillance après 500 heures ?
   c) Quelle est la probabilité qu'au moins une ampoule fonctionne après 500 heures?
   d) Calculer l'espérance de X.

Exercice 2) (5 points, bac S, 2000, Amérique du Sud)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité 2 cm.

1) a) Donner la forme algébrique du nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz-2=4i-z$. On donnera la solution sous forme algébrique.
2) On désigne par A, I et B les points d'affixes respectives 1, $2i$ et $3+i$.
   a) Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice.
   b) Calculer l'affixe z_C du point C, image de A par la symétrie de centre I.
   c) Ecrire sous forme algébrique le nombre $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$, en déduire son module et un de ses arguments (z_A z_B désignent les affixes des points A et B). Que peut-on en déduire ?
   d) D est le point d'affixe z_D tel que $z_D-z_C=z_A-z_B$. Montrer que $ABCD$ est un carré.
3) Pour tout point M du plan on considère le vecteur $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$.
   a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ en fonction de $\overrightarrow{MI}$.
   b) Montrer que le point K défini par $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=2\overrightarrow{AB}$ est le milieu de [AD].
   c) Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=2AB$.

   Construire Γ.

Problème (Amérique du Sud, 2000, 10 points)

Partie A : mise en place d'une inégalité.

1) Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$. On désigne par Δ la droite d'équation $y = x + 1$ et par Γ la courbe d'équation $y = e^x$.
   c) Que représente la droite Δ pour la courbe Γ ?
   b) Tracer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite Δ et donner l'allure de la courbe Γ.
2) a) Démontrer que pour tout réel t, $e^t \geq t+1$. Interpréter graphiquement ce résultat.
   b) En déduire que pour tout réel t, $e^{-t}+t+1 \geq 2$ et que pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x}+\ln x+1 \geq 2$.

Partie B : étude d'une fonction.

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x)=(x+1)\ln x$, on appelle C sa courbe représentative.

1) a) Etudier le sens de variation de g.
   b) Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.
2) a) Déterminer une équation de la tangente D à C en son point d'abscisse 1.
   b) Etudier les variations h définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x)=g(x)-2x+2$.
   c) En déduire le signe de h et la position de C par rapport à D
3) Ne pas tracer C ni D.

Partie C : étude d'une suite

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \int_n^{n+1} g(x)dx$.

1) Donner une interprétation graphique de U_n.
2) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $g(n) \leq U_n \leq g(n+1)$.
3) En déduire le sens de variation de (U_n). Est-elle convergente ?

Partie D : étude d'une intégrale.

On désigne par G la primitive de g sur $]0 ; +\infty[$ qui s'annule en 1. On a donc $G(x) = \int_1^x g(t)dt$

1) Quel est le sens de variation de G ? En déduire le signe de $G(x)$.
2) Calculer $G(x)$.
3) Etudier les limites de G en 0 et $+\infty$