Classes de Terminale S

Bac blanc 2000

Epreuve de mathématiques

Durée : 4 heures

Calculatrice autorisée.

Exercice 1) Tous les élèves, 5 points.

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les deux équations suivantes :

a) $z^2 - 2z + 5 = 0$

b) $z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$.

2) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points *A*, *B*, *C*, *D* d'affixes respectives $z_A = 1+2i$, $z_B = 1+\sqrt{3}+i$, $z_C = 1+\sqrt{3}-i$, $z_D = 1-2i$.

a) Placer *A*, *B*, *C*, *D* et préciser la nature du quadrilatère *ABCD*.

b) Vérifier que $\dfrac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = i\sqrt{3}$. Que peut-on en déduire pour les droites (*AB)* et (*BD*) ?

c) Prouver que les quatre points *A*, *B*, *C*, *D* appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer Γ.

3) On considère l'équation (1) : $z^2 - 2(1+2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0$ où θ désigne un réel quelconque.

a) Résoudre (1) dans $\mathbb{C}$.

b) Montrer que les images des solutions de (1) appartiennent au cercle Γ.

Exercice 2) Elèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité, 4 points.

On tire simultanément 8 cartes d'un jeu de 32, et on appelle ce tirage une *main*.

1) Combien y a-t-il de mains différentes possibles ?

2) Combien de mains ne comportent-elles que des cartes rouges.

3) a) Combien de mains contiennent-elles le roi de pique ?

b) Combien de mains comportent-elles exactement 2 as ?

c) Combien de mais comportent-elles exactement 1 roi et 2 piques ?

d) Combien de mains comportent-elles la dame de carreau et au moins 2 cœurs ?

4) Combien de mains comportent-elles les 4 as ou les 4 rois ?

Exercice 2) Elèves suivant l'enseignement de spécialité (4 points)

Soit *n* un entier naturel qui s'écrit dans le système décimal $n = \overline{abcabc}$ avec $a \neq 0$.

1) a) Déterminer *n* tel que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

n est divisible par 5

L'entier $\overline{bc}$ est le double de *a*.

b) Décomposer le nombre ainsi obtenu en produit de facteurs premiers.

2) Etude du cas général

a) Montrer que *n* est divisible par $\overline{abc}$. En déduire qu'il est divisible par 7, 11 et 13.

b) Montrer que *n* ne peut pas être un carré parfait (c'est à dire le carré d'un entier naturel) .

3) Montrer que 121 et 140 sont premiers entre eux.

4) On pose n_1 = 121121 et n_2 = 140140. On appelle (E) l'équation $n_1 x + n_2 y = 1001$ d'inconnues les entiers relatifs *x* et *y*.

a) Déterminer une solution particulière de (E)

b) Résoudre (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

Problème. Tous les élèves, 11 points

Partie A

1) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = e^t$ et Γ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité 2 cm.

a) Tracer Γ ainsi que sa tangente au point d'abscisse 0 après en avoir donné une équation sous la forme $y = \varphi_1(t)$. Par une observation graphique, comparer e^t et $t + 1$.

b) Etudier le sens de variation de la fonction $h : t \to \varphi(t) - \varphi_1(t)$. En déduire que pour tout élément t de $\mathbb{R}$ on a $e^t \geq t+1$. Préciser dans quel(s) cas on a l'égalité.

2) Déduire de ce qui précède que pour tout élément t de]-1 ; +∞ [on a $e^{-t} \leq \dfrac{1}{t+1}$. Préciser dans quel(s) cas on a l'égalité.

Partie B

Soit f la fonction définie sur]-1 ; +∞ [par $f(x) = \ln(x+1) + e^{-x}$.

1) Déterminer les limites de f en –1 et en +∞.

2) Etudier les variations de f. Dresser le tableau de ces variations.

3) Soit $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormal d'unité 4 cm.

a) Quelle est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 ?

b) Construire $\mathscr{C}$ et cette tangente.

4) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur [-0,95 ; 0].

b) Compléter le tableau suivant : (on le recopiera sur la copie, on donnera une approximation décimale à 10^{-2} près.

x	-0,95	-0,94	-0,93	-0,92	-0,91	-0,90
$f(x)$						

c) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

d) Etudier le signe de $f(x)$.

Partie C

Soit $J = \displaystyle\int_\alpha^0 f(x)dx$, où α est le réel défini dans la partie B, mais il n'est pas nécessaire d'avoir traité la partie B pour traiter cette partie jusqu'à la question 5)a) incluse.

1) Interpréter graphiquement J. Sans chercher à calculer J, montrer géométriquement que $0 \leq J \leq -\alpha$.

2) a) Montrer que pour tout $x > -1$, $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$

b) Calculer $\displaystyle\int_\alpha^0 \frac{x}{x+1}dx$ en fonction de α.

3) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, $\displaystyle\int_\alpha^0 \ln(x+1)dx$ en fonction de α.

4) a) Calculer l'intégrale J en fonction de α.

b) En utilisant le fait que α est solution de $f(x) = 0$, montrer que $J = \alpha - 1 + e^{-\alpha}(\alpha+2)$

5) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - 1 + e^{-x}(x+2)$.

a) Calculer g'. Montrer que pour tout réel x, $g'(x) = e^{-x}h(x)$ où h est la fonction définie au A. En déduire le signe de $g'(x)$ et les variations de g.

b) Utiliser l'encadrement d'amplitude 10^{-2} de α pour donner un encadrement de J puis une valeur approchée de J en indiquant la précision.