***Lycée Richelieu***

***Bac blanc 2004***

***Epreuve de mathématiques***

***Durée : 4 heures***

***Le sujet comporte deux parties. Pour la première partie (exercices 1 à 3) la calculatrice est autorisée. La deuxième partie (exercices 4 et 5) sera distribuée à 11h15, et à partir de cet instant la calculatrice sera interdite.***

## *Exercice 1) (pour tous les élèves, 5 points)*

On considère la fonction $f$ définie sur ]0 ; +∞[ par $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x-2)$

1) Déterminer les limites de $f$ en 0 et en +∞.
2) Montrer que $f$ est dérivable sur]0 ; +∞[ et calculer $f'(x)$.
3) Soit $u$ la fonction définie sur ]0 ; +∞[ par $u(x)=\ln x+x-3$.
   a) Etudier les variations de $u$.
   b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle [2 ; 3]. Montrer que $2{,}20 < \alpha < 2{,}21$
   c) Etudier le signe de $u(x)$ sur ]0 ; +∞[
4) a) Etudier les variations de $f$.
   b) Exprimer $\ln\alpha$ comme un polynôme en $\alpha$. Montrer que $f(\alpha)=-\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$.
   En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude $2\times10^{-2}$
5) a) Etudier le signe de $f(x)$ sur ]0 ; +∞[
   b) Tracer la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm.

## *Exercice 2) (pour tous les élèves, 5 points)*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité 2 cm. On placera sur une même figure, que l'on complètera au fur et à mesure, les points définis dans le texte.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-2z\sqrt{3}+4=0$.
   b) On considère les nombres complexes $z_1=\sqrt{3}+i$ et $z_2=\sqrt{3}-i$ et on désigne par $M$ et $N$ les points d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$. Déterminer le module et un argument de $z_1$ et $z_2$. Placer $M$ et $N$ sur la figure.
   c) Déterminer les affixes $z_P$ et $z_Q$ des points $P$ et $Q$, images respectives de $N$ et $M$ par la translation de vecteur $\vec{w}=-2\vec{u}$. Placer $P$ et $Q$. Montrer que $MNPQ$ est un carré.
2) Soit $R$ le symétrique de $P$ par rapport à $O$, $E$ l'image de $P$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et $S$ l'image de $E$ par l'homothétie de centre $O$ et de rapport $\sqrt{3}$. Placer ces points, calculer leurs affixes $z_R, z_E, z_S$. Montrer que $S$ appartient au segment [$MN$].
3) a) Montrer que $\dfrac{z_R-z_P}{z_S-z_P}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ (on pourra exprimer $z_R-z_P$ et $z_S-z_P$ à l'aide de $2-\sqrt{3}$ ).
   b) En déduire la nature du triangle $PRS$.

## *Exercice 3) (élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité, 4 points)*

Pendant une phase d'apprentissage, l'efficacité d'un individu croît jusqu'à une valeur maximale.

1) Etude d'un modèle discret :

   Supposons qu'une personne travaillant sur une technique nouvelle produise 5 unités le premier jour, alors que la production attendue est de 40 unités par jour.

   On appelle $u_n$ la production au n-ième jour. Alors $u_1 = 5$, et on fait l'hypothèse que pour tout entier $n$, $u_{n+1} = 0,8u_n + 8$.

   a) Calculer $u_2$, $u_3$.

   b) On pose pour $n \geqslant 1$ $v_n = 40 - u_n$. Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique, et en déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$. Quel est le sens de variation de $(u_n)$ ?

   c) Déterminer la limite de $(u_n)$. Au bout de combien de temps la production sera-t-elle supérieure à 39 unités ?

2) Etude d'un modèle continu :

   Supposons que la production initiale soit de 100 unités à l'heure, que la production attendue soit de 800 unités, et que la vitesse d'apprentissage soit proportionnelle à la quantité manquante pour réaliser l'optimum. Ainsi, si $f(t)$ est la production horaire à l'instant $t$, on a $f'(t) = 0,8(800 - f(t))$.

   a) Résoudre l'équation différentielle $y' = 640 - 0,8y$. En déduire la fonction $f$. Quelle est la limite de $f$ en $+\infty$ ?

   b) Au bout de combien de temps la production est-elle la moitié de l'optimum ? 99 % de l'optimum ?

*Rappel de formulaire* : l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a$ et $b$ étant deux constantes réelles) a pour solution $y = -\frac{b}{a} + Ke^{ax}$.

## *Exercice 3) Elèves suivant l'enseignement de spécialité (4 points)*

Soit $n$ un entier naturel qui s'écrit dans le système décimal $n = \overline{abcabc}$ avec $a \neq 0$.

1) a) Déterminer $n$ tel que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

   $n$ est divisible par 5

   L'entier $\overline{bc}$ est le double de $a$.

   b) Décomposer le nombre ainsi obtenu en produit de facteurs premiers.

2) Etude du cas général

   a) Montrer que $n$ est divisible par $\overline{abc}$. En déduire qu'il est divisible par 7, 11 et 13.

   b) Montrer que $n$ ne peut pas être un carré parfait (c'est à dire le carré d'un entier naturel) .

3) Montrer que 121 et 140 sont premiers entre eux.

4) On pose $n_1 = 121121$ et $n_2 = 140140$. On appelle (E) l'équation $n_1 x + n_2 y = 1001$ d'inconnues les entiers relatifs $x$ et $y$.

   a) Déterminer une solution particulière de (E)

   b) Résoudre (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

### *Exercice 4 (pour tous les élèves, 3 points)*

1) $n$ désignant un entier naturel non nul, exprimer la somme $S_1 = 1 + 2 + \dots + n$ à l'aide du symbole $\Sigma$. Donner l'expression de $S_1$ en fonction de $n$ et démontrer ce résultat.
2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul $n$, la somme $S_2$ définie par $S_2 = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + ... + n(n+1)$ est égale à $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
3) Pour tous entiers naturels non nuls $n$ et $k$, on pose :
   $S_k = 1\times 2\times ...\times k + 2\times 3\times ...\times (k+1) + ... + n\times (n+1)\times ...\times (n+k-1)$.
   Démontrer que pour tous $n$ et $k$, on a $S_k = \dfrac{n(n+1)....(n+k)}{k+1}$.

### *Exercice 5 (pour tous les élèves, 3 points)*

Pour chaque question, plusieurs affirmations sont données. Elles peuvent être vraies ou fausses. Il n'y a pas forcément une seule affirmation vraie par question. Dire, pour chaque affirmation, si elle est vraie ou fausse. Toute réponse exacte apportera des points, toute réponse inexacte entraînera une pénalité. Une absence de réponse n'entraînera pas de pénalité. En cas de résultat négatif à une question, celui-ci sera ramené à 0. Aucune justification n'est demandée. On reproduira le tableau ci-dessous sur la copie, et on le remplira.

| | **Affirmation a** | **Affirmation b** | **Affirmation c** | **Affirmation d** |
|---|---|---|---|---|
| **Question 1** | | | | |
| **Question 2** | | | | |
| **Question 3** | | | | |

1) Soient $f$ et $g$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x - 1$ et $g(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$.
   Alors, pour tout $x$ de [1 ; 4] :
   a) $-4 \le f(x) \le -1$
   b) $\dfrac{1}{f(x)} \le -\dfrac{1}{4}$
   c) $g(x) \ge \dfrac{x}{x^2+1}$
   d) $g(x) \le 2$
2) Soit $f$ une fonction dérivable sur [–1 ; 1] telle que $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$. Alors
   a) Pour tout $x$ de [–1 ; 0], $f'(x) \geqslant 0$.
   b) Il existe $c$ appartenant à ]–1 ; 0[ tel que $f(c) = \dfrac{1}{2}$.
   c) L'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet exactement deux solutions dans ]–1 ; 1[.
   d) L'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet au moins deux solutions dans ]–1 ; 1[.
3) Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{|x|}}{e^x+1}$. Alors :
   a) La fonction $f$ est paire.
   b) La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$
   c) La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   d) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$