Lycée Richelieu, Rueil Malmaison

Bac blanc 2001

Mathématiques

Terminales S

Exercice 1) (pour tous les élèves, 4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points *M*, *M'* et *M''* d'affixes respectives *z*, *z* + *i* et *iz* où *z* est un nombre complexe différent de 0.

1) Caractériser la transformation qui à *M* associe *M'*, puis celle qui à *M* associe *M''*.
2) Pour quel nombre *z* a-t-on *M'* = *O* ? pour quel nombre *z* a-t-on *M '* = *M ''* ?
3) Dans cette question on suppose *z* distinct de 0, de –*i* et de $\frac{1-i}{2}$.
   a) Prouver que les points *O*, *M'* et *M''* sont alignés si et seulement si $\frac{z+i}{iz}$ est réel.
   b) On pose *x* = Re(*z*) et *y* = Im(*z*). Calculer $\mathrm{Im}\left(\frac{z+i}{iz}\right)$ en fonction de *x* et *y*.
   c) Déterminer et représenter l'ensemble E des points *M* du plan tels que *O*, *M'* et *M''* soient distincts et alignés.
4) a) Soit *A* le point d'affixe –*i*. Exprimer $\left|\frac{z+i}{iz}\right|$ en fonction de *AM* et *OM*.
   b) Déterminer et représenter l'ensemble F des points du plan tels que *OM'M''* soit un triangle isocèle en *O*.

Exercice 2) (élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité, 5 points)

Soit *f* la fonction numérique définie sur ℝ par $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^{x})$.

Pour tout réel strictement positif α on pose $I_\alpha = \int_0^\alpha f(x)dx$.

1) Montrer que *f* est une fonction à valeurs positives. Quel est le signe de I_α ?
2) a) Déterminer des nombres réels *a* et *b* tels que pour tout réel *x*, $\frac{e^x}{1+e^x} = a + \frac{b}{1+e^x}$.

   En déduire le calcul de $\int_0^\alpha \frac{1}{1+e^x}dx$

   b) Calculer *f* + *f '*, où *f '* est la fonction dérivée de *f*

   c) En déduire le calcul de I_α.

Exercice 2) (élèves suivant l'enseignement de spécialité, 5 points)

1) Montrer que si p et q sont deux entiers relatifs premiers entre eux, il en est de même de p et q^3.
2) On se propose de trouver les solutions rationnelles de l'équation :
   (1) : $3x^3 - 2x^2 + 6x - 4 = 0$.
   On rappelle qu'un nombre rationnel est le quotient de deux entiers relatifs.
   a) Soit $\frac{a}{b}$ un nombre rationnel écrit sous forme irréductible. Montrer que s'il est solution de (1) alors a divise 4 et b divise 3.
   b) Montrer qu'une solution de (1) ne peut pas être négative.
   c) Déduire de ce qui précède que la seule solution rationnelle de (1) est $\frac{2}{3}$.
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $3x^3 - 2x^2 + 6x - 4 = 0$.

Problème (pour tous les élèves, 11 points)

Question préliminaire : k désignant un nombre réel, on appelle g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x(\ln x)^2 + kx$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ (pour cette dernière on pourra poser $x = \frac{1}{t^2}$).

On considère dans toute la suite la fonction f_k définie sur $[0\,;1]$ par $f_k(x) = x(\ln x)^2 + kx$ si $x > 0$, et $f_k(0) = 0$. On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 10cm. On note I, J, L les points de coordonnées respectives (1 ; 0), (0 ; 1) et (1 ; 1).

Première partie

Etude des fonctions f_k.

A : Etude et représentation de f_0.

Dans cette question, $k = 0$.

1) Signe de la dérivée
   a) Calculer la dérivée f_0' de f_0 sur $]0\,;1]$ et montrer que pour tout x appartenant à $]0\,;1]$ on a $f_0'(x) = (\ln x)(2 + \ln x)$.
   b) Déterminer les solutions de l'équation $f_0'(x) = 0$ sur $]0\,;1]$
   c) Etudier le signe de $f_0'(x)$ sur $]0\,;1]$
2) Etude à l'origine
   Déterminer la limite de $\frac{f_0(x)}{x}$ quand x tend vers 0. f_0 est-elle dérivable en 0 ? Donner une équation de la tangente en O à la courbe $\mathscr{C}_0$.
3) Tracé de la courbe $\mathscr{C}_0$.
   a) Dresser le tableau des variations de f_0.
   b) Tracer $\mathscr{C}_0$.

B : Etude de f_k.

1) Dérivée de f_k.
   a) Calculer $f_k'(x)$ sur]0 ; 1]
   b) Soit A_k le point de $\mathscr{C}_k$ d'abscisse 1. Montrer que la tangente T_k à $\mathscr{C}_k$ au point A_k est la droite (OA_k)
   c) Déterminer la tangente à $\mathscr{C}_k$ en O.

On ne demande pas d'étudier les variations de f_k.

2) Etude de f_1.
   a) Prouver que pour tout $x \in]0 ; 1]$, $f_1'(x) = (1 + \ln x)^2$
   b) Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.
   c) Etablir le tableau de variation de f_1 et tracer $\mathscr{C}_1$ sur le même graphique que $\mathscr{C}_0$ en précisant le coefficient directeur de la tangente T_1 à $\mathscr{C}_1$ au point A_1.

3) Etude de $f_{\frac{1}{2}}$.
   a) Prouver que pour tout $x \in [0 ; 1]$ $f_{\frac{1}{2}}(x) = \dfrac{f_0(x) + f_1(x)}{2}$.
   b) En déduire une construction de $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$ à partir de $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ et tracer $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$ sur le même graphique que $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ en précisant le coefficient directeur de la tangente $T_{\frac{1}{2}}$ à $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$ au point $A_{\frac{1}{2}}$

Deuxième partie

Partage du carré *OILJ* en quatre parties de même aire.

Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$.

1) Calcul d'une intégrale.

   On pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 x(\ln x)^2\,dx$

   a) Prouver en effectuant une intégration par parties que $I(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2}{2}(\ln\alpha)^2 - \displaystyle\int_\alpha^1 x\ln x\,dx$.
   b) Prouver ensuite que $I(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2}{2}(\ln\alpha)^2 + \dfrac{\alpha^2}{2}\ln\alpha + \dfrac{1}{4} - \dfrac{\alpha^2}{4}$.
   c) Déterminer la limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers 0.

2) Calculs d'aires.
   a) On pose $S_k(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 f_k(x)\,dx$. Exprimer $S_k(\alpha)$ en fonction de α ; en déduire la limite S_k de $S_k(\alpha)$ quand α tend vers 0. On admettra que cette limite représente l'aire (exprimée en unités d'aire) du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}_k$, l'axe (Ox) et la droite d'équation $x = 1$, et on admettra que $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$.
   b) En déduire que les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$ partagent le carré *OILJ* en quatre parties de même aire.