Classe de terminale S_5 ***Vendredi 24 janvier 2003***

Devoir de mathématiques

N°10

Exercice 1) (d'après bac F2, 1993, 6 points)

On considère les nombres complexes z_n tels que $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = (1+i\sqrt{3})z_n, n \in \mathbb{N}$. On note M_n le point d'affixe z_n dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1cm.

1) Calculer le module et un argument de $1+i\sqrt{3}$, en déduire la forme exponentielle de z_n.
2) Donner la forme algébrique de z_1, z_2, z_3. Placer M_1, M_2, M_3 sur le graphique.
3) Calculer $d_0 = |z_1 - z_0|, d_1 = |z_2 - z_1|$. Interpréter graphiquement ces deux nombres.
4) On pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$ montrer que (d_n) est une suite géométrique.
5) Montrer que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle en M_n.
6) Montrer que la longueur de la ligne brisée $M_0M_1M_2\ldots M_n$ est égale à $\sqrt{3}(2^n - 1)$. A partir de quelle valeur de n cette longueur dépasse-t-elle 1km?

Exercice 2) (Bac C, Toulouse, 1985, 8 points)

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points distincts A, B, C d'affixes respectives a, b et $-b$.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les points A, B et C soient alignés.
   Dans toute la suite on suppose que A, B et C ne sont pas alignés et que ABC est direct.
2) Sur les segments [AB] et [AC], à l'extérieur du triangle, on construit les carrés $AFGB$ et $ACDE$, et le parallélogramme $AEHF$ (on pourra utiliser sans justification que $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$ sont directs)
   a) En considérant la rotation de centre A qui transforme C en E, montrer que l'affixe e du point E est $e = -ib + a(1-i)$.
   b) Calculer les affixes f, h, d des points F, H, D en fonction de a et b.
3) Déduire de la question 2) que
   a) $FE = 2OA$ et que les droites (FE) et (OA) sont perpendiculaires.
   b) $BD = CH$ et que les droites (BD) et (CH) sont perpendiculaires.

Exercice 3) (d'après Bac D, Nouvelle Calédonie, 1993, 6points)

Pour tout nombre complexe z, on définit $P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8$.

1) Calculer $P(2)$, montrer que l'on a $P(z) = (z-2)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4)$.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. On appelle z_1 et z_2 les solutions de cette équation autres que 2, z_1 ayant sa partie imaginaire positive. Vérifier que $z_1 + z_2 = 2\sqrt{2}$. Mettre z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on appelle A le point d'affixe 2, B et C les points d'affixes respectives z_1 et z_2, et I le milieu de [AB].
   a) Montrer que le triangle OAB est isocèle. En déduire une mesure de $(\vec{u}, \overrightarrow{OI})$.
   b) Calculer l'affixe z_I de I, puis le module de z_I.
   c) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$.