9 Nombres complexes

Ouverture

Née pour résoudre des équations, la théorie des nombres complexes est devenue un incontournable de la science. On en retrouve des applications dans diverses branches des mathématiques et de la physique. En effet pour traiter un problème réel on peut être amené à « plonger » ce problème dans les nombres complexes, où la résolution sera plus simple, pour ensuite « redescendre » dans les réels et conclure le raisonnement. C'est le cas pour la résolution d'équations différentielles, pour l'étude de suites ou encore l'étude de phénomènes vibratoires.

Réponse à la question : l'ensemble de Mandelbrot

Soient a et b deux réels. Les deux suites réelles définies par $x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a$ et $y_{n+1} = 2x_n y_n + b$, avec $x_0 = y_0 = 0$, peuvent se réunir en une seule suite complexe, notée $z_{n+1} = z_n^2 + c$, en posant $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$. Ici $c = a + \mathrm{i}b$, avec $\mathrm{i}^2 = -1$.

L'ensemble de Mandelbrot est l'ensemble des points C de coordonnées $(a\ ;\ b)$ tels que ni x_n, ni y_n ne tendent vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Vérifier ses acquis

1 **a.** $x = 3 \in \mathbb{N}$; **b.** $x = -4 \in \mathbb{Z}$;

c. $x = \frac{3}{2} \in \mathbb{D}$; **d.** $x = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$.

2 **1. a.** $S = \{-\frac{1}{2}\ ;\ 1\}$; **b.** $S = \{1\}$;

c. $S = \{-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}\}$; **d.** $S = \{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\ ;\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$

e. $S = \varnothing$; **f.** $S = \varnothing$.

2. Les solutions de **c.** et **d.** sont irrationnelles.

3 **a.** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

b. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

c. $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

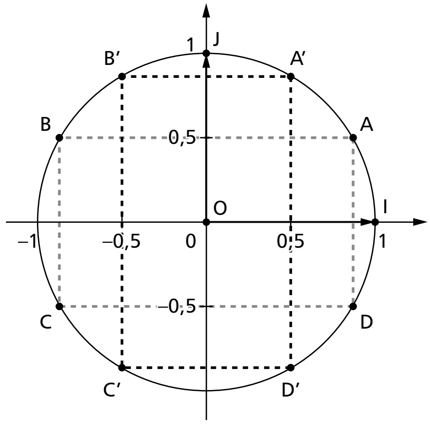
4 **1. a.** $A(\cos\frac{\pi}{6}\ ;\ \sin\frac{\pi}{6})$ donc $A(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1}{2})$.

b. $B(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1}{2})$; **c.** $C(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ -\frac{1}{2})$;

d. $D(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ -\frac{1}{2})$.

2. $A'(\cos\frac{\pi}{3}\ ;\ \sin\frac{\pi}{3})$ donc $A'(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2})$;

$B'(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2})$; $C'(-\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{\sqrt{3}}{2})$; $D'(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ -\frac{1}{2})$.



5 **a.** $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DE}$; $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{EI}$.

b. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI}$.

c. $\widehat{IOA} = \frac{\pi}{3}$; $\widehat{IOB} = 2\frac{\pi}{3} = \widehat{AOC} = \widehat{IOD} = \widehat{DEI}$;

$\widehat{IOC} = \pi$; $\widehat{CEI} = \frac{\pi}{2}$.

6 **a.** $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$; $AC = \sqrt{7^2 + 1} = 5\sqrt{2}$; $BC = 5$.

Le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

b. $K(\frac{3}{2}\ ;\ \frac{5}{2})$

c. $D(1\ ;\ -1)$. ABCD est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur et perpendiculaires : c'est un carré.

d. KA = KB = KC = KD. Le cercle de centre K passe par les 4 points A, B, C, D.

7 **1. a.** $\sin\frac{\pi}{6} = \sin 5\frac{\pi}{6} = 0{,}5$;

$\sin(-\frac{\pi}{6}) = \sin(-5\frac{\pi}{6}) = -0{,}5$.

b. $\cos\frac{\pi}{3} = \cos(-\frac{\pi}{3}) = 0{,}5$;

$\cos 2\frac{\pi}{3} = \cos(-2\frac{\pi}{3}) = -0{,}5$.

c. $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$; $\sin(-3\frac{\pi}{4}) = \cos(-3\frac{\pi}{4})$.

d. $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4}$; $\sin(3\frac{\pi}{4}) = -\cos 3\frac{\pi}{4}$.

2. a. $\frac{\pi}{4}$;

b. $\frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi$;

c. $\frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi$;

d. $\frac{25\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 3 \times 2\pi$;

e. $-\frac{\pi}{4}$;

f. $-\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\pi$;

g. $-\frac{13\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} - 2\pi$;

h. $-\frac{25\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} - 3 \times 2\pi$.

Activités d'introduction

Activité 1

1 On pose $f(x) = x^3 - 6x - 40$ et on vérifie que la courbe coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 4, unique solution de (E_1)

2 **a.** $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$.

b. Si $u^3 + v^3 = 40$ et $3uv = 6$, alors
$x^3 = (u + v)^3 = 40 + 6x$, donc x est solution de (E_1).

c. $3uv = 6$ donc $uv = 2$ et $(uv)^3 = u^3v^3 = 8$.
$a + b = 40$ et $ab = 8$, donc
$a(40 - a) = b(40 - b) = 8$ donc a et b sont les solutions de l'équation $x^2 - 40x + 8 = 0$.

d. $a = 20 - 14\sqrt{2} = (2 - \sqrt{2})^3$ et
$b = 20 + 14\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})^3$. Ainsi $x = 4$.

Activité 2

1 On pose $f(x) = x^3 - 15x - 4$ et on vérifie que la courbe coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 4, ainsi qu'en deux autres points. En développant l'expression, on obtient
$(x - 4)(x^2 + 4x + 1) = x^3 - 4x^2 + 4x^2 - 16x + x - 4 = x^3 - 15x - 4$. Les solutions de (E_2) sont $-2 - \sqrt{3}$, $-2 + \sqrt{3}$, et 4.

2 **a.** On pose $x = u + v$, et $a = u^3$ et $b = v^3$. Alors $a + b = 4$ et $ab = 5^3$ donc $125 = a(4 - a) = b(4 - b)$. Ainsi a et b sont les deux solutions de l'équation $x^2 - 4x + 125 = 0$, soit $(x - 2)^2 + 121 = 0$ qui n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

b. $(x - 2)^2 - (-121) =$
$(x - 2 - 11\sqrt{-1})(x - 2 + 11\sqrt{-1})$
donc $a = 2 - 11\sqrt{-1}$ et $b = 2 + 11\sqrt{-1}$.

c. $(2 - \sqrt{-1})^3 = 2^3 - 3 \times 2^{2\sqrt{-1}} + 3 \times 2.$
$(\sqrt{-1})^2 - (\sqrt{-1})^3 = 8 - 12\sqrt{-1} - 6 + \sqrt{-1} = 2 - 11\sqrt{-1}$
et $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$. On retrouve $a + b = 4$ qui est bien une solution de (E_2).

Activité 3

1 **a.** $(2 - i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i$;
$(2 - i)^3 = (3 - 4i)(2 - i) = 6 - 3i - 8i + 4i^2 = 2 - 11i$;
$(2 + i)^3 = 2 + 11i$.

b. $(2 - i)^3 + (2 + i)^3 = 2 - 11i + 2 + 11i = 4$. Donc $(2 - i)^3 + (2 + i)^3$ est bien solution de l'équation (E_2) de l'activité 2.

2 $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (4 - i) = 6 + 2i$ et $z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(4 - i) = 8 - 2i + 12i - 3i^2 = 11 + 10i$.

3 **a.** $(2 + 3i)(2 - 3i) = 2^2 - (3i)^2 = 9 + 4 = 13$ donc $(2 + 3i)\cdot\frac{2 - 3i}{13} = 1$ donc $2 + 3i$ et $\frac{2 - 3i}{13}$ sont inverse l'un de l'autre.

b. $(a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$.

c. $(a + ib)\cdot\frac{a - ib}{a^2 + b^2} = 1$ donc l'inverse du nombre complexe $a + ib$ est $\frac{a - ib}{a^2 + b^2}$.

Activité 4

1 **a.** $(1 + i)z = 2 \Leftrightarrow z = \frac{2}{1+i} = \frac{2}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{2(1-i)}{2} = 1 - i$.

b. $(1 + i)z = 2 - i \Leftrightarrow z = \frac{2-i}{1+i} = (1 - i)(2 - i) = 2 - 2i - i - 1 = 1 - 3i$.

c. $(2 - 3i)z + 5 = (3 + 4i)z + 1 \Leftrightarrow (2 - 3i - 3 - 4i)z = -4 \Leftrightarrow (-1 - 7i)z = -4 \Leftrightarrow z = \frac{4}{1+7i} = \frac{4(1-7i)}{1+7^2} = \frac{4(1-7i)}{50}$.

d. $(2 - 3i)\bar{z} + 5 = (3 + 4i)z + 1 \Leftrightarrow z = a + ib$ et
$(2 - 3i)(a - ib) + 5 - (3 + 4i)(a + ib) - 1 = 0$
$\Leftrightarrow z = a + ib$ et $(2a - 3b + 5 - 3a + 4b - 1)$
$+ i(-3a - 2b - 4a - 3b) = 0 \Leftrightarrow z = a + ib$ et
$(-a + b + 4) + i(-7a - 5b) = 0$
$\Leftrightarrow z = a + ib$ et $(-a + b + 4) = 0$ et $(-7a - 5b) = 0$
$\Leftrightarrow z = a + ib$ et $a = b + 4$ et $-7(b + 4) - 5b = 0$
$\Leftrightarrow z = a + ib$ et $a = b + 4$ et $-12b = 28 \Leftrightarrow z = \frac{5}{3} - \frac{7}{3}i$.

2 **a.**

- $x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$. $S = \{-\sqrt{5}\ ;\ \sqrt{5}\}$
- $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = 0$. $S = \{2\}$
- $x(x - 3) = 0$; $S = \{0\ ;\ 3\}$
- $(x + 2)^2 - 3 = (x + 2 + \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3}) = 0$.

$S = \{-2 - \sqrt{3}\ ;\ -2 + \sqrt{3}\}$

b.

- $x^2 + 1 = x^2 - i^2 = (x - i)(x + i) = 0$. $S = \{-i\ ;\ i\}$
- $x^2 + 4 = x^2 - 4i^2 = (x - 2i)(x + 2i) = 0$.

$S = \{-2i\ ;\ 2i\}$

- $-x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3 = x^2 = 3i^2 =$
$(x - \sqrt{3}i)(x + \sqrt{3}i) = 0$. S = $\{-\sqrt{3}i\ ;\ \sqrt{3}i\}$
- $(x + 2)^2 + 4 = (x + 2)^2 - 4i^2 =$
$(x + 2 - 2i)(x + 2 + 2i) = 0$. S = $\{-2 + 2i\ ;\ -2 - 2i\}$

c. $x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 54 + 1 = (x + 2)^2 + 1 =$
$(x + 2)^2 - i^2 = (x + 2 - i)(x + 2 + i)$; pour
$x^2 + 4x + 5 = 0$, on a S = $\{-2 + i\ ;\ -2 - i\}$

d.
- $x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x + 1)^2 + 1 =$
$(x + 1)^2 - i^2 = (x + 1 - i)(x + 1 + i)$; pour
$x^2 + 2x + 2 = 0$, on a S = $\{-1 + i\ ;\ -1 - i\}$
- $x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} =$
$(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4}i^2 = (x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$; pour
$x^2 + x + 1 = 0$, on a S = $\{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$

e. Démonstration dans le cours page 270.

f.
- $x^2 + 4x + 5 = 0$. $\Delta = 16 - 20 = -4 = (2i)^2$ donc
$z_1 = \frac{1}{2}(-4 - 2i) = -2 - i$ et $z_2 = \frac{1}{2}(-4 + 2i) = -2 + i$.
- $x^2 + 2x + 2 = 0$. $\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$ donc
$z_1 = \frac{1}{2}(-2 - 2i) = -1 - i$ et $z_2 = \frac{1}{2}(-2 + 2i) = -1 + i$.
- $x^2 + x + 1 = 0$. $\Delta = 1 - 4 = -3 = (\sqrt{3}i)^2$ donc
$z_1 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i) =$
$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

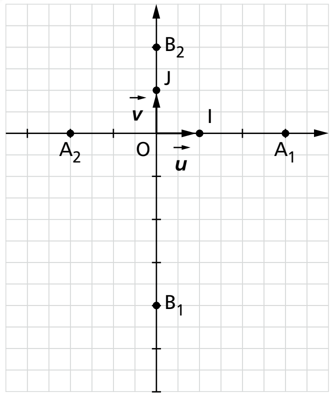
3 **a.** $(z - 4)(z^2 + bz + c) = z^3 - 4z^2 + bz^2 -$
$4bz + cz - 4c = z^3 - (4 - b)z^2 - (4b - c)z - 4c$.
Ainsi $z^3 - (4 - b)z^2 - (4 - c)z - 4c = z^3 = 6z - 40$
$\Leftrightarrow$ $4 - b = 0$; $4b - c = 6$ et $4c = 40$ $\Leftrightarrow$ $b = 4$ et
$c = 10$.

b. $z^2 + 4z + 10 = 0 \Leftrightarrow (z + 2)^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow$
$z = -2 - i\sqrt{6}$ ou $z = -2 + i\sqrt{6}$. (E) a trois solutions, dont une seule réelle.

c. $2^3 - 2 - 6 = 0$ donc 2 est solution de
$z^3 - z - 6 = 0$.
$(z - 2)(z^2 + bz + c) = z^3 - 2z^2 + bz^2 - 2bz + cz - 2$
$c = z^3 - (2 - b)z^2 - (2b - c)z - 2c$.
Or $z^3 - (2 - b)z^2 - 2 - c)z - 2c = z^3 - z - 6 \Leftrightarrow$
$2 - b = 0$; $2b - c = 1$ et $2c = 6 \Leftrightarrow b = 2$ et $c = 3$.
$z^2 + 2z + 3 = 0 \Leftrightarrow (z + 1)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow z = -1 - i\sqrt{2}$
ou $z = -1 + i\sqrt{2}$.
$z^3 - z - 6 = 0$ a trois solutions dont une seule réelle.

Activité 5

1 et **2**



3 $z_D = -2 + i$; $z_E = 3 + 2i$.

4 **a.** $z_{\vec{w_1}} = 2 + i$; $z_{\vec{w_2}} = -1 + 2i$.

b. $z_{\vec{w}} = z_{\vec{w_1}} + z_{\vec{w_2}} = 2 + i + (-1 + 2i) = 1 + 3i$.

c. $z_B - z_A = 3i - 2$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}(-2\ ;3)$.
$z_{\overrightarrow{DE}} = z_E - z_D = 5 + i$.

Activité 6

1 **a.** $z_{D'} = 2 - i$ et $z_{E'} = -3 - 2i$.

b. $z_{D'} = -z_D$ et DED'E' est un parallélogramme.

c. M est le milieu de [AB] $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$
$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et $z_M = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = 1 + \frac{3}{2}i$

2 Soit $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$.

a. $\vec{t} = 3\vec{w} = 3(2\vec{u} - \vec{v}) = 6\vec{u} - 3\vec{v}$.
$z_{\vec{t}} = 6 - 3i = 3(2 - i) = 3z_{\vec{w}}$.

b. $\vec{t}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires non nuls si et seulement s'il existe un réel k non nul tel que $\vec{t} = k\vec{w}$.
Si $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$, alors $\vec{t} = k(x\vec{u} + y\vec{v}) = kx\vec{u} + ky\vec{v}$, par conséquent $z_{\vec{t}} = kx + iky = k(x + iy) = kz_{\vec{w}}$.

c. A, B, C sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow z_C - z_A = k(z_B - z_A)$, or k est réel, par conséquent $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel.

Activité 7

1 **a.** $\bar{a} = \sqrt{3} - i$, $a \cdot \bar{a} = (\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i) =$
$(\sqrt{3})^2 + 1 = 4 = OA^2$;
$\bar{\bar{a}} = a$ et $\overline{(-a)} = -\bar{a}$ donc $|a| = |\bar{a}| = |-a| = |-\bar{a}|$.

b. $|b| = \sqrt{2}$; $a \times b = (\sqrt{3} + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i}) =$
$(\sqrt{3} + 1) + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 1)$;
$|a \times b|^2 = (\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 =$
donc $|a \times b| = 2\sqrt{2} = |a| = |b|.\frac{1}{b} = \frac{1+\mathrm{i}}{2}$ et
$|\frac{1}{b}| = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{|b|}$.

2 **a.** $A_0(\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2})$. $a_0 = \frac{1}{2}a$ donc les points O, A, A_0 sont alignés (voir activité 6).
$OA_0 = 1$ donc A_0 est sur le cercle trigonométrique
$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{6}$.
b. $b_0 = \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$, $\cos\theta' = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta' = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc
$\theta' = -\frac{\pi}{4}$.
c. $a_0b_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}((\sqrt{3} + 1) + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 1))$.
$\cos(\theta + \theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
$\sin(\theta + \theta') = \sin\theta\cdot\cos\theta' + \cos\theta\cdot\sin\theta' = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
d. $a = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}) = 2(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6})$ et
$b = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4}))$.
$(\widehat{\vec{u} ; \overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\vec{u} ; \overrightarrow{OB_0}}) = -\frac{\pi}{4}$.
e. $(\widehat{\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}}) = \arg\frac{b}{a}$; or $\frac{b}{a} = \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}} =$
$\frac{(1-\mathrm{i})(\sqrt{3}-\mathrm{i})}{4} = \frac{1}{4}((\sqrt{3} - 1) + \mathrm{i}(-\sqrt{3} - 1)) =$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\theta' - \theta) + \mathrm{i}\sin(\theta' - \theta))$.
Or $|\frac{b}{a}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $\arg\frac{b}{a} = \theta' - \theta = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{12}$.

Activité 8

1 $\cos(\theta + \theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta$ et
$\sin(\theta + \theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'$.

2 **a.** $g(0) = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0 = 1$.
$g(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = \mathrm{i}$.
b. $\frac{1}{g(\theta)} = \frac{1}{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta} = \frac{\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} =$
$\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta) = g(-\theta)$.
c. $g(\theta)\cdot g(\theta') = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta') =$
$\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta + \mathrm{i}(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta') =$
$\cos(\theta + \theta') + \mathrm{i}\sin(\theta + \theta')$ donc $g(\theta)\cdot g(\theta') = g(\theta + \theta')$.
d. $g' = \cos' + \mathrm{i}\sin' = -\sin + \mathrm{i}\cos = \mathrm{i}2\sin + \mathrm{i}\cos =$
$\mathrm{i}(\cos + \mathrm{i}\sin) = \mathrm{i}g$.

3 **a.** $|e^{\mathrm{i}\theta}| = 1$ et $\arg(e^{\mathrm{i}\theta}) = \theta$.
b. $e^{\mathrm{i}\pi} = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = -1$; $-e^{\mathrm{i}\theta} = e^{\mathrm{i}\pi}e^{\mathrm{i}\theta} = e^{\mathrm{i}(\theta+\pi)}$
donc $|-e^{\mathrm{i}\theta}| = 1$ et $\arg(-e^{\mathrm{i}\theta}) = \theta + \pi$.
c. $\frac{e^{\mathrm{i}\theta}}{e^{\mathrm{i}\theta'}} = e^{\mathrm{i}\theta}.e^{\mathrm{i}(-\theta')} = e^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$ donc $|\frac{e^{\mathrm{i}\theta}}{e^{\mathrm{i}\theta'}}| = 1$ et
$\arg(\frac{e^{\mathrm{i}\theta}}{e^{\mathrm{i}\theta'}}) = \theta - \theta'$.

4 $(\widehat{\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{OM'}}) = \arg\frac{e^{\mathrm{i}\theta'}}{e^{\mathrm{i}\theta}} = \theta' - \theta$.

Travaux pratiques

TP TICE 1 Des polynômes symétriques

1 **a.** Les racines de *f* sont les abscisses des points communs de la courbe avec l'axe des abscisses. Il y a deux racines réelles si et seulement si $c > 2$ ou si $c < -2$. Elles semblent avoir le même signe et plus l'une est grande, plus l'autre est petite.
b. $\Delta = c^2 - 4$ et $(\Delta \geqslant 0 \Leftrightarrow c > 2$ ou $c < -2)$.
$(x - \alpha)(x - \alpha') = x^2 + cx + 1$ donc $\alpha\alpha' = 1$.
c. Si $P(\alpha) = 0$ alors $\alpha^2 + c\alpha + 1 = 0$ donc
$\overline{\alpha^2 + c\alpha + 1} = 0$. Ainsi $\bar{\alpha}^2 + c\,\bar{\alpha} + 1 = 0$, et $P(\bar{\alpha}) = 0$.
d. $x^2 + 2\cos\theta x + 1 = 0$ donc $c = 2\cos$ et $-2 \leqslant c \leqslant 2$.
Si $\cos\theta = 1$, P admet une seule racine $x = -1$; si $\cos\theta = -1$, P admet une seule racine $x = 1$ et si $-1 < \cos\theta < 1$, alors $\Delta = 4(\cos^2\theta \ -1) = -4\sin^2\theta$ et les deux racines sont $z_1 = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ et $z_2 = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta$.

2 Dans l'exemplaire élève, l'énoncé a été modifié :
e. $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
a. Toutes les courbes passent par les points A(0 ; –1) et B(0 ; 1).
$P(-1) = -a + b - b + a = 0$, $a \neq 0$.
b. En développant $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$.
c. $P(x) = a(x^3 + cx^2 + cx + 1) =$
$a(x^3 + 1 + c(x^2 + x)) = a(x + 1)(x^2 - x + 1 + cx) =$
$a(x + 1)(x^2 + (c - 1)x + 1)$.
d. *P* admet trois racines réelles distinctes si $c - 1 > 2$ ou $c - 1 < -2$, c'est-à-dire si $c > 3$ ou $c < -1$.
e. $2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(2x^2 + x + 2)$. Pour $2x^2 + x + 2 = 0$, $\Delta = 1 - 16 = -15$, et les racines sont $z_1 = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{15}}{4}$ et $z_2 = \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{15}}{4}$.

3 **a.** $P(0) = 1 \neq 0$.
b. Si $z \neq 0$, $\frac{P(z)}{z^2} = \frac{1}{z^2}(z^4 + 1) + \frac{1}{z^2}(3z^3 + 3z) +$
$\frac{1}{z^2}4z^2 = (z^2 + \frac{1}{z^2}) + 3(z + \frac{1}{z}) + 4$.

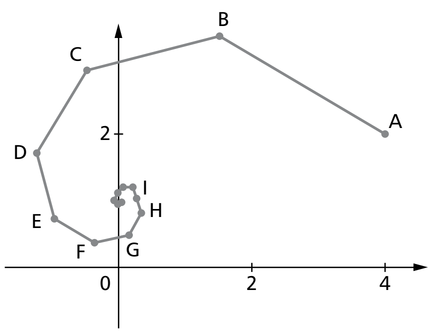
c. $Z^2 = (z + \frac{1}{z^2})^2 = (z^2 + \frac{1}{z^2}) + 2$ donc
$P(z) = 0 \Leftrightarrow Z^2 - 2 + 3Z + 4 = Z^2 + 3Z + 2 = (Z + 2)(Z + 1) = 0$.

d. On pose $c = 2\cos\theta$. Sachant que $z \neq 0$, $z + \frac{1}{z} = -1$
$\Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ou $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$,
puis $z + \frac{1}{z} = -2 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -1$.
P a donc trois racines : $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et -1.

e. $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow Z = z + \frac{1}{z}$ et $Z^2 = 2 + Z + 1 = Z^2 + Z - 1 = (Z - \frac{-1+\sqrt{5}}{2})(Z - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}) = 0$.
Sachant que $z \neq 0$, $z + \frac{1}{z} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$
$z^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$ et $z + \frac{1}{z} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$
$z^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$.
L'équation a donc quatre solutions :
$z_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$, $z_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$,
$z_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$ et $z_4 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$.

TP TICE 2 Suite de nombres complexes et suite de points

1 Si $z = x + iy$, $f(z) = \frac{1}{2}(1 + i)(x + iy) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(x - y) + \frac{1}{2} + i(\frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{2})$. Grâce à GeoGebra tableur, on crée deux suites x_n, y_n puis on obtient la ligne brisée suivante :



La suite de points semble converger vers le point J d'affixe i.

2 Soit J le point d'affixe i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_n = JA_n$.
La suite de points semble converger vers 0 et d_n semble être géométrique.

3 **a.** $f(\omega) = \omega \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}((1 + i)\omega + 1 + i) \Leftrightarrow$
$2\omega = (1 + i)\omega + 1 + i = (1 - i)\omega = 1 + i \Leftrightarrow \omega = i$.
J est donc le seul point invariant.

b. $d_{n+1} = |a_{n+1} = \omega| = |\frac{1}{2}(1 + i)|\cdot|a_n = \omega| = \frac{\sqrt{2}}{2}d_n$.
La suite (d_n) est géométrique de raison
$0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ donc convergente vers 0.

c. Le point A_n d'affixe a_n tend vers le point J.

TP TICE 3 Un peu de géométrie

1 **a.** @ Le fichier GeoGebra corrigé est disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee.

b. $(\widehat{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}}) = (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}})$

c. i. $(\widehat{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}}) = \arg(\frac{z_1}{z_2}) = -\arg\frac{z_2}{z_1} = -(\widehat{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}})$.

ii. $(\widehat{-\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}}) = \arg(\frac{-z_2}{z_1}) = \arg(-1) + \arg(\frac{z_2}{z_1}) = (\widehat{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}}) + \pi$.

iii. $(\widehat{\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w_2}}) = \arg(\frac{z_2}{z}) = \arg(\frac{z_2}{z_1} \times \frac{z_1}{z}) = \arg\frac{z_2}{z_1} + \arg\frac{z_1}{z} = (\widehat{\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}})$.

iv. L'affixe de $\overrightarrow{AC}$ est égal à $c - a$; l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est égal à $b - a$ donc $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \arg(\frac{c-a}{b-a})$.

2 **a.** Si $(c - a) = i(b - a)$, alors $|c - a| = |b - a|$ donc $AC = AB$ et $\frac{c-a}{b-a} = i$ donc $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \arg i = \frac{\pi}{2}$.
Par conséquent le triangle ABC est rectangle isocèle direct en A.

b. De même, si $(c - a) = -i(b - a)$, $AB = AC$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ alors le triangle ABC est rectangle isocèle indirect en A.

c. Les réciproques sont vraies : si ABC est isocèle rectangle alors $AB = AC$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{2}$ ou $= \frac{\pi}{2}$.
ABC rectangle isocèle $\Leftrightarrow ((c - a) - i(b - a))((c - a) + i(b - a)) = 0 \Leftrightarrow (c - a)^2 + (b - a)^2 = 0$.

TP TICE 4 Conjecturer des lieux de points

1 **a.** @ Le fichier GeoGebra corrigé est disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee.

b. c. R semble fixe et le milieu de [AB] et S semblent décrire un segment porté par la droite d'équation $y = -x$, délimité par les points $A'(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2})$ et $B'(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2})$.

2 **a.** L'équation de (AB) est $y = 1 - x$, donc $z_M = x + i(1 - x)$.

b. Soit I le milieu de [PQ]. Son affixe est $z_I = \frac{1}{2}(x + i(1 - x))$. Le triangle PIR est rectangle isocèle direct donc on a : $z_R - z_I = i(z_P - z_I)$ donc $z_R = z_I + i(z_P - z_I) =$
$\frac{1}{2}(x + i(1 - x)) + i(x - \frac{1}{2}(x + i(1 - x)) = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$.

Le triangle PIS est rectangle isocèle indirect donc on a : $z_S - z_I = -i(z_P - z_I)$ donc
$z_s = z_I - i(z_P - z_I) =$
$\frac{1}{2}(x + i(1 - x)) - i(x - \frac{1}{2}(x + i(1 - x)) =$
$x - \frac{1}{2} + i(\frac{1}{2} - x)$.

TP TICE 5 Étude de fonctions sinusoïdales

Dans l'exemplaire élève, l'énoncé a été modifié : tous les φ^1 et φ^2 deviennent des φ_1 et φ_2 et en **4.c.** on cherche à déduire la valeur de A et de φ.

1 $u(t) = A\sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$

2 **a.** $u = u_1 + u_2$ semble être de la forme $u(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, c'est-à-dire une sinusoïde.

3 $u(t) = \mathrm{Re}A(\cos(\omega t + \varphi) + i\sin(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\underline{U}(t)$, avec $\underline{U}(t) = Ae^{i(\omega t+\varphi)}$.

4 **a.** $\underline{U}_1(t) = A_1e^{i(\omega t+\varphi_1)}$, $\underline{U}_2(t) = A_2e^{i(\omega t+\varphi_2)}$, $\underline{U}(t) = Ae^{i(\omega t+\varphi)}$.

b. $\underline{U}(t) = \underline{U}_1(t) + \underline{U}_2(t) = e^{i\omega t}(A_1e^{i\varphi_1} + A_2e^{i\varphi_2}) = e^{i\omega t}(Ae^{i\varphi})$.

c. $e^{i\omega t} \neq 0$ donc $(A_1e^{i\varphi_1} + A_2e^{i\varphi_2}) = Ae^{i\varphi}$. Ainsi $A = |(A_1e^{i\varphi_1} + A_2e^{i\varphi_2})|$ et $\varphi = \arg(A_1e^{i\varphi_1} + A_2e^{i\varphi_2})$.

5 **a.** $\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) + \cos(\omega t - \frac{\pi}{6}) = A\cos(\omega t + \varphi)$.

$e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{\pi}{6}} = i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 3\frac{i}{2} = \sqrt{3}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) =$
$\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $A = \sqrt{3}$ et $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

b. $1 + 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + 1 + i\sqrt{3} = 2 + i\sqrt{3}$.

On a donc $\cos\pi t + 2\cos(\pi t + \frac{\pi}{3}) = A\cos(\omega t + \varphi)$ avec $\omega = \pi$, $A = \sqrt{7}$, $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{7}}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

TP TICE 6 Analyse fréquentielle d'un système (SI)

Dans l'exemplaire élève, l'énoncé a été modifié : on pose $\underline{U}_0(t) = U_0e^{i\omega t+\varphi}$; le gain est noté $\underline{\mathbf{G}} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{U}_i}$; on étudie $G = |\underline{G}|$ et $\arg(\underline{G})$.

1 **b.** • $\underline{Z} = iL\omega = i2\pi Lf = 110\pi i$.

• $\underline{Z} = -\frac{1}{C\omega}i = -\frac{1}{2\pi Cf}i = -\frac{1000}{\pi}i$.

2 **a. b.** $\underline{G} = \frac{\underline{U}_o}{\underline{U}_i} = \frac{\underline{Z}_C\underline{I}}{\underline{Z}_C\underline{I} + \underline{Z}_R\underline{I}} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} =$
$\frac{1}{1 + \underline{Z}_R / \underline{Z}_C}$ avec $\frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C} = -\frac{RC\omega}{i} = RC\omega i$.

$\underline{G} = \frac{1}{1 + i\omega\tau}$, $\tau = RC$.

c. $|\underline{G}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$ et $\varphi = \arg(\underline{G}) = -\arg(1 + i\omega\tau)$ et $\tan\varphi = -\omega\tau$.

d. $G = \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}004096\omega^2}}$.

Exercices

Maîtriser le cours

1 **a.** et **b.** Faux : $\mathrm{Im}(z) = 2$; **c.** et **d.** Vrai.

2 Dans l'exemplaire élève, l'énoncé a été modifié : **b.** $\mathrm{Re}(iz) = b$.

a. Vrai ; **b.** Faux : $\mathrm{Re}(iz) = -b$;
c. Faux : $\mathrm{Im}(z^2) = a^2 - b^2$; **d.** Vrai.

3 $\mathrm{Re}(2i) = 0$, $\mathrm{Im}(2i) = 2$;
$\mathrm{Re}(-3) = -3$, $\mathrm{Im}(-3) = 0$; $\mathrm{Re}(0) = \mathrm{Im}(0) = 0$;
$\mathrm{Re}(i^2) = -1$, $\mathrm{Im}(i^2) = 0$; $\mathrm{Re}(3i - 1) = -1$,
$\mathrm{Im}(3i - 1) = 3$.

4 z réel $\Leftrightarrow 4 - x = 0 \Leftrightarrow x = 4$.
z imaginaire pur $\Leftrightarrow 2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

Les énoncés des exercices **5** et **6** p. 280 ont été intervertis dans l'exemplaire élève.

5 $2 + 4 - i + 3(7 - 2i) = 27 - 7i$;
$4(-3 + 2i)(4i - 5) = 28 - 88i$.

6 $z = x + iy$; $z' = x' + iy'$; $z + z' = x + x' + i(y + y')$.
$\overline{z + z'} = x + x' - i(y + y') = x - iz + x' - iy' = \bar{z} + \bar{z}'$.

7 **a.** Faux ; **b.** Vrai ; **c.** Faux ; **d.** Faux.

8 $\overline{z_1} = 8 + 3i$; $\overline{z_2} = 2 - 6i$.

9 $-\frac{1}{2}$; $-i$; $\frac{i}{4}\cdot i$; $\frac{1-2i}{5}$; $1+2i$.

10 $-2i$; $\frac{-4-8i}{5}$; $\frac{9-13i}{25}$.

11 **a.** $S = \{\frac{1-3i}{2}\}$ **b.** $S = \{\frac{14+7i}{5}\}$

12 **a.** $S = \{-1 ; 1\}$ **b.** $S = \{-\sqrt{3}i ; \sqrt{3}i\}$

13 **a.** $S = \{2-\sqrt{5} ; 2+\sqrt{5}\}$ **b.** $S = \{-5i ; -i\}$

14 **a.** $S = \{1 ; 2\}$ **b.** $S = \{-1+i\sqrt{2} ; -1-i\sqrt{2}\}$

15 $z_A = 3$; $z_B = -4i$; $z_C = 2+3i$.

16 $-2i$; 4 ; $-2+5i$; $4-3i$.

17 $z_{\overrightarrow{AB}} = -2-2i$; $z_{\overrightarrow{CD}} = 2-3i$.

18 $z_{\overrightarrow{AB}} = x-3+4i = -4(3-i)$ pour $x = -9$.

19 $z_{\overrightarrow{AB}} = -2-2i$; $z_{\overrightarrow{DC}} = x-4+yi$.

On en déduit qu'ABCD est un parallélogramme pour $x = 2$ et $y = -2$.

20 **1.** b. **2.** b. **3.** b. **4.** a.

21 $AB = 2\sqrt{2}$ et $CD = \sqrt{13}$.

22 $|-1| = 1$; $\arg(-1) = \pi$.
$|4| = 4$; $\arg(4) = 0$.
$|2i| = 2$; $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$.
$|-3i| = 3$; $\arg(-3i) = -\frac{\pi}{2}$.
$|2-2i| = 2\sqrt{2}$; $\arg(2-2i) = -\frac{\pi}{4}$.
$|\sqrt{3}+i| = 2$; $\arg(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{6}$.
$|\sqrt{3}-3i| = 2\sqrt{3}$; $\arg(\sqrt{3}-3i) = -\frac{\pi}{3}$.

23 **a.** et **b.** $zz' = rr'(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta \sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'))$ et $|zz'| = rr'$.
c. $\arg(zz') = \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z')$.

24 $-1 = e^{i\pi}$; $4 = 4e^{i2\pi}$; $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$; $-3i = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$;
$2-2i = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$;
$\sqrt{3}-3i = 2\sqrt{3}\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

25 $z_1 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.
$z_1z_2 = 4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

27 **a.** Imaginaire pur si $x = -2{,}5$;
b. Imaginaire pur si $x = 0$, réel si $y = 0{,}6$.

29 **a.** $7-24i$; **b.** $7+24i$; **c.** 25.

30 **a.** $-11-29i$; **b.** $-6-11i$.

31 **a.** $13+55i$; **b.** $-7i$.

32 **a.** $-11+2i$; **b.** $-11-2i$; **c.** $-4i$.

33 **a.** $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; **b.** -1.

Dans l'exemplaire élève, l'énoncé des exercices **34** à **36** p. 281 a été modifié comme suit : « Pour les exercices **34** à **36**, mettre les **conjugués** des nombres suivants sous forme algébrique ».

35 **a.** $-5-2i$; **b.** $-3+2i$; **c.** $-3+4i$.

36 **a.** $-2+2i$; **b.** $-6-19i$.

37 **a.** $\frac{3+2i}{13}$; **b.** $\frac{-3-5i}{34}$; **c.** $= \frac{i}{2}$.

38 **a.** $\frac{1-2i}{5}$; **b.** $\frac{-3-i}{10}$; **c.** $\frac{-3+4i}{5}$.

39 **a.** $\frac{-11+29i}{962}$; **b.** $\frac{11+7i}{170}$; **c.** $\frac{11+23i}{650}$.

40 $z_1+z_2 = 4-3i$; $z_1z_2 = 1-7i$;
$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2} = \frac{1+i}{2}$; $z_1^2+z_2^2 = 5-10i$;
$\frac{1}{z_2^2}+\frac{1}{z_1^2} = \frac{-2+11i}{50}$.

41 $z_1^2-3z_2 = 2+9i$; $z_1z_2 = 7-i$;
$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2} = \frac{7+i}{10}$; $\frac{1}{z_2^2}+\frac{1}{z_1^2} = \frac{2+i}{10}$

42 $f(i) = -1-2i$; $f(1+i) = -2$; $f(\frac{1}{2+i}) = \frac{-17+6i}{25}$.

43 **a.** $\overline{Z} = \overline{z}-3i$; **b.** $\overline{Z} = (\overline{z}+i)(\overline{z}-2i)$;
c. $\overline{Z} = -i\overline{z}-3$; **d.** $\overline{Z} = 1-i\overline{z}$.

44 **a.** $\overline{Z} = \frac{\overline{z}+i}{\overline{z}+2}$; **b.** $\overline{Z} = \frac{\overline{z}-3-i}{\overline{z}+2+i}$.

45 **a.** $z' = \overline{z}$ donc $z+z' = z+\overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ est un réel.
b. $z-z' = z-\overline{z} = 2i\cdot\mathrm{Im}(z) = -\frac{22}{17}i$.

46 **a.** $z'\overline{z} = 13$; **b.** $z'\overline{z} = 25$; **c.** $z'\overline{z} = \frac{1}{5}$.

47 **a.** $z'\overline{z} = 5$; **b.** $z'\overline{z} = 100$; **c.** $z'\overline{z} = \frac{5}{13}$.

48 Par propriété des conjugués, $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$.

49 $\overline{f(z)} = -f(\overline{z})$.

50 **a.** $f(z) = x^2-2x-y^2+i(2xy-2y)$;
b. $f(z) = \frac{x(x+2)+y(y-1)}{(x+2)^2+y^2} + i\,\frac{(x+2)(y-1)-xy}{(x+2)^2+y^2}$;
c. $f(z) = \frac{x^2-x+y^2-7}{(x+2)^2+(y-1)^2} + i\,\frac{2x+5y-1}{(x+2)^2+(y-1)^2}$.

52 **a.** $(2+4i)z+3-i=5z-i \Leftrightarrow (3-4i)z=3 \Leftrightarrow z=\frac{3(3+4i)}{25}$.

b. $(1+3i)(i\bar{z}-1)=(3-2i)(\bar{z}+7) \Leftrightarrow$

$(-6+3i)\bar{z}=22-11i \Leftrightarrow z=\bar{z}=-\frac{11}{3}$.

53 **a.** $(2-i)z+3-i=3\bar{z}-i \Leftrightarrow (2-i)(x+iy)+3-3(x-iy) \Leftrightarrow -x+y+3=-x+5y=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{15}{4}$ et $y=\frac{3}{4}$.

b. $4-iz+3-i=2(\bar{z}-2i) \Leftrightarrow$

$7+y=2x=-x+2y+3=0 \Leftrightarrow z=\frac{11}{3}+\frac{i}{3}$.

54 **a.** $\frac{i}{z+2i}=4 \Leftrightarrow z=-2i+\frac{i}{4}=-\frac{7}{4}i$.

b. $\frac{z+3}{iz-2}=i \Leftrightarrow z=-\frac{3}{2-i}$.

55 **a.** $S=\{-\sqrt{5}\ ;\ \sqrt{5}\}$ **b.** $S=\{-2i\ ;\ 2i\}$

56 **a.** $S=\{2i\ ;\ 4i\}$ **b.** $S=\{2\sqrt{3}-3i\ ;-2\sqrt{3}-3i\}$

57 **a.** $z^2-\bar{z}=2 \Leftrightarrow (x^2-y^2-x-2=2xy+y=0)$

$\Leftrightarrow x^2-y^2-x-2=0$ et $y=0$ ou $x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow z=-1$ ou $z=2$.

b. $z^2-\bar{z}^2=2 \Leftrightarrow 2i\cdot\mathrm{Im}(z^2)=0$ donc $S=\varnothing$.

59 **a.** $S=\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{15}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{15}}{2}\}$

b. $S=\{\frac{1+\sqrt{17}}{2}\ ;\ \frac{1-\sqrt{17}}{2}\}$

60 **a.** $S=\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{5}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{5}}{2}\}$

b. $S=\{\frac{1+\sqrt{7}}{2}\ ;\ \frac{1-\sqrt{7}}{2}\}$

61 **a.** $S=\{\frac{1}{6}+i\frac{\sqrt{47}}{6}\ ;\ \frac{1}{6}i-\frac{\sqrt{47}}{6}\}$

b. $S=\{-1\ ;\ \frac{4}{3}\}$

62 **a.** $S=\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$

b. $S=\{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\}$

63 **a.** $z^2-2z=z \Leftrightarrow z(z-3)=0 \Leftrightarrow z=0$ ou $z=3$.

b. $z^2-2z=3 \Leftrightarrow z=-1$ ou $z=3$;
$z^2-2z=-2 \Leftrightarrow z=1+i$ ou $z=1-i$.

64 **a.** $\frac{z-1}{z+2}=z \Leftrightarrow z^2+z+1=0 \Leftrightarrow$

$z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. $\frac{z-1}{z+2}=3 \Leftrightarrow z=-\frac{7}{2}$;

$\frac{z-1}{z+2}=-2i \Leftrightarrow z(1-2i)=1+4i \Leftrightarrow z=-\frac{7}{5}+\frac{6}{5}i$.

65 $\frac{z-3+i}{z+2-i}=4 \Leftrightarrow z=-\frac{11}{3}+\frac{5}{3}i$;

$\frac{z-3+i}{z+2-i}=-2i \Leftrightarrow z(1+2i)=1-5i \Leftrightarrow z=-\frac{9}{5}-\frac{7}{5}i$.

Pour les exercices **66** et **67 a.** p. 282, les énoncés ont été modifiés dans l'exemplaire élève comme suit :

ex. 66 :

a. $\begin{cases}2z_1-3z_2=4\\ iz_1+4z_2=5i\end{cases}$; **b.** $\begin{cases}z_1+z_2=1\\ z_1\times z_2=1\end{cases}$.

ex. 67 :

a. $\begin{cases}3z_1+z_2=2-5i\\ z_1-z_2=2+i\end{cases}$

66 **a.** $\begin{cases}2z_1-3z_2=4\\ iz_1+4z_2=5i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(8+3i)z_1=16+15i\\ (8+3i)z_2=6i\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}z_1=\frac{173+72i}{73}\\ z_2=\frac{18+48i}{73}i\end{cases}$;

b. $\begin{cases}z_1+z_2=1\\ z_1\times z_2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z_1+z_2=1\\ z_1(1-z_1)=1\end{cases}$ donc

z_1 et z_2 sont solutions de $z^2-z+1=0$.

Ainsi $\{z_1\ ;\ z_2\}=\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$

67 **a.** $\begin{cases}3z_1+z_2=2-5i\\ z_1-z_2=2+i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4z_1=4-4i\\ 4z_2=-4-8i\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}z_1=1-i\\ z_2=-1-2i\end{cases}$;

b. $\begin{cases}z_1+2z_2=2\\ z_1\times 2z_2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z_1+2z_2=2\\ z_1\times(2-z_1)=2\end{cases}$ donc

z_1 et $2z_2$ sont solutions de $z^2-2z+2=0$.

$z_1=1+i$ et $z_2=\frac{1-i}{2}$ ou $z_1=1=i$ et $z_2=\frac{1+i}{2}$.

68 $(z^2-3z+1)(z^2+z+2)=z^4-2z^3-5z+2$.

$z^2-3z+1=0 \Leftrightarrow z=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ou $z=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$;

$z^2+z+2=0 \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i$ ou $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i$.

$S=\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\ ;\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i\ ;\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i\}$

69 Dans l'exemplaire élève, l'énoncé a été modifié :
$f(z)=z^3-(2+3i)z^2+2(1+3i)z-6i$.

a. $(z-3i)(z^2-2z+2)=z^3-2z^2+2z-3iz^2+6iz-6i=f(z)$.

b. $f(z) = 0 \Leftrightarrow z = 3i$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0$.
$S = \{3i ; 1 + i ; 1 - i\}$

70 **a.** $f(2i) = (2i)^3 - (1 + 2i)(2i)^2 + (1 + 2i)(2i) - 2i = -8i + 4 + 8i + 2i - 4 - 2i = 0$;
b. $(z - 2i)(z^2 - z + 1) = z^3 - z^2 + z - 2i \cdot z^2 + 2iz - 2i = f(z)$;
c. $f(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2i$ ou $z^2 - z + 1 = 0$;
$S = \{2i ; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i ; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$

71 $f(z) = 0 \Leftrightarrow Z = z^2$ et $Z^2 + 4Z - 5 = 0 \Leftrightarrow Z = z^2$ et ($Z = 1$ ou $Z = -5$) $\Leftrightarrow z^2 = 1$ ou $z^2 = -5$.
$S = \{-1 ; 1 ; -i\sqrt{5} ; i\sqrt{5}\}$

72 $f(z) = 0 \Leftrightarrow Z = z^2$ et $Z^2 + 5Z + 6 = 0 \Leftrightarrow Z = z^2$ et $Z = -2$ ou $Z = -3 \Leftrightarrow z^2 = -2$ ou $z^2 = -3$.
$S = \{-i\sqrt{2} ; i\sqrt{2} ; -i\sqrt{3} ; i\sqrt{3}\}$

73 **a.** $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$.
b. $z^6 - 1 = (z^3 - 1)(z^3 + 1) = (z - 1)(z^2 + z + 1)(z + 1)(z^2 - z + 1)$.
c. $S = \{1 ; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i ; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i ; -1 ; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i ; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$

76 **a.** $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -1 - 2i$.
b. ABCD parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
$\Leftrightarrow z_D = z_C - z_{\overrightarrow{AB}} \Leftrightarrow z_D = -2 + 2i + 1 + 4i = -1 + 6i$.
c. $\frac{1}{2}(5 + i - 2 + 2i) = \frac{1}{2}(3 + 3i) = \frac{1}{2}(4 - 3i - 1 + 6i)$.
[AC] et [BD] ont donc le même milieu.

78 Dans l'exemplaire élève, l'énoncé a été modifié : $z_A = \mathbf{2} + i$.
$z_{\overrightarrow{AB}} = 1 - 3i$, $z_{\overrightarrow{DC}} = 2 - 6i = 2z_{\overrightarrow{AB}}$.
(AB) et (CD) sont donc parallèles.

79 Dans l'exemplaire élève, l'énoncé a été modifié : **b.** I est le milieu de **[BC]**.
a. $z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) = \frac{1}{3}(5 + i)$;
b. $z_I = \frac{1}{2}(z_B + z_C) = \frac{1}{2}(2 - i)$. $z_{\overrightarrow{AG}} = \frac{1}{3}(-4 - 5i)$;
$z_{\overrightarrow{AI}} = \frac{1}{2}(-4 - 5i)$.
$z_{\overrightarrow{AG}} = \frac{2}{3}z_{\overrightarrow{AI}}$ donc A, I et G sont alignés.

80 **a.** $z_I = \frac{1}{2}(3 - i)$; $z_J = \frac{1}{2}(2 + 3i)$;
$z_K = \frac{1}{2}(-5 - 2i)$.
b. $z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) = 0 = z_{G'} = \frac{1}{3}(z_I + z_J + z_K)$.
ABC et IJK ont donc même centre de gravité.

81 **a.** $z_{\overrightarrow{AB}} = 4 - 2i = z_{\overrightarrow{DC}}$ donc ABCD est un parallélogramme.
b. $2(z_G - z_A) - (z_G - z_B) + 2(z_G - z_C) = 0 \Leftrightarrow$
$z_G = \frac{1}{3}(2z_A - z_B + 2z_C) \Leftrightarrow$
$z_G = -\frac{1}{3}i = \frac{1}{3}(z_A + z_c + z_D)$.

Pour les exercices 82 à 84, soit M de coordonnées $(x ; y)$.

82 **a.** $M(-\frac{31}{16} + \frac{41}{16}i)$.
b. $(1 + i)z - (1 - i)\bar{z} + 2i = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}((1 + i)z = -1 \Leftrightarrow x + y + 1 = 0$. L'ensemble des points M est donc la droite d'équation $y = -x - 1$.
c. $(1 - 2i)z + (1 + 2i)\bar{z} + 4 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(1 - 2i)z = -2 \Leftrightarrow x + 2y + 2 = 0$. L'ensemble des points M est donc la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x - 1$.
d. $2x + 4y = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$. L'ensemble des points M est donc le cercle de centre I(1 ; 2) et de rayon $\sqrt{5}$.

83 **a.** $\operatorname{Im}(z^2 + \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow xy - y = y(2x - 1) = 0$.
L'ensemble des points M est la réunion des droites $y = 0$ et $x = \frac{1}{2}$.
b. $\operatorname{Im}((1 + z)(i + \bar{z})) = 0 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$.
L'ensemble des points M est donc la droite d'équation $y = x + 1$.
c. $\operatorname{Re}((1 + z)(i + \bar{z})) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - y = 0$.
L'ensemble des points M est donc le cercle de centre $I(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
d. $\operatorname{Im}(z^2 - z + 2) = 2xy - y = 0$. La solution est la même qu'en **a.**

84 Dans l'exemplaire élève, les questions **e.** et **f.** ont été supprimées.
a. $\operatorname{Im}(\frac{z - 1}{z + 2i}) = -\frac{2x - y - 2}{x^2 + (y + 2)^2} = 0$.
L'ensemble des points M est donc la droite d'équation $y = 2x - 2$ privée de A(0 ; –2).
b. $\operatorname{Re}(\frac{z - 1}{z + 2i}) = \frac{x^2 - x + y^2 + 2y}{x^2 + (y + 2)^2} = 0$.
L'ensemble des points M est donc le cercle de centre $I(\frac{1}{2} ; -1)$ de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ privé de A(0 ; –2).
c. $\operatorname{Im}\frac{z + 1 - 2i}{z - 3 + 2i} = \frac{-4x - 4y + 4}{(x - 3)^2 + (y + 2)^2} = 0$.

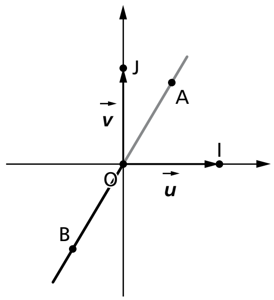
L'ensemble des points M est la droite d'équation $y = -x + 1$ privée de B(3 ; –2).

d. $\text{Re}\left(\dfrac{z+1-2i}{z-3+2i}\right) = \dfrac{x^2-2x+y^2-7}{(x-3)^2+(y+2)^2} = 0.$

L'ensemble des points M est le cercle de centre I(1 ; 0) et de rayon $2\sqrt{2}$ privé de B(3 ; –2).

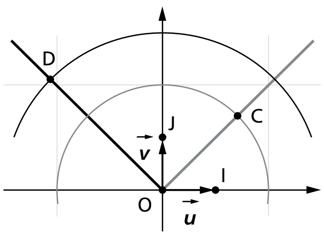
86 A, B, C, D et E sont sur le cercle de centre O et rayon 2. Le module de leurs affixes, *a*, *b*, *c*, *d*, *e* est 2. On lit $\arg(a) = 0$, $\arg(b) = \dfrac{\pi}{2}$, $\arg(c) = -\dfrac{\pi}{3}$, $\arg(d) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\arg(e) = \dfrac{5\pi}{6}$.

87

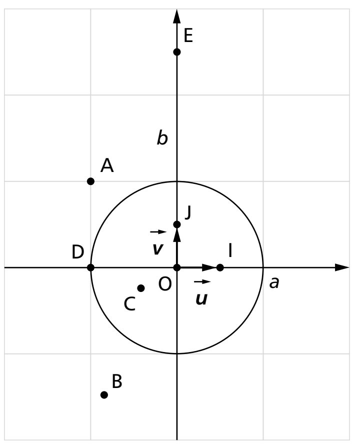


a. L'ensemble des points M est la demi droite [OA).
b. L'ensemble des points M est la demi droite [OB).

88 **a.** point C **b.** point D



89



$|a| = 2\sqrt{2}$, $\arg(a) = 3\dfrac{\pi}{4}$; $|b| = 2\sqrt{3}$, $\arg(b) = -2\dfrac{\pi}{3}$; $|c| = 1$; $\arg(c) = -\dfrac{5\pi}{6}$; $|d| = 2$, $\arg(d) = \pi$; $|e| = 5$, $\arg(e) = \dfrac{\pi}{2}$.

90 **a.** $|z| = 1$, $\arg(z) = \dfrac{11\pi}{12}$.

b. $|a| = 3$, $\arg(a) = \dfrac{11\pi}{12}$; $|b| = 1$, $\arg(b) = \dfrac{11\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}$; $|c| = 2$, $\arg(c) = \dfrac{11\pi}{12} + \pi$, $|d| = 4$, $\arg(d) = \dfrac{11\pi}{12} - \dfrac{\pi}{2}$; $|e| = 1$, $\arg(e) = \dfrac{11\pi}{12}$.

91 **a.** $z = 2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)$; $|z| = 2\sqrt{3}$, $\arg(z) = \dfrac{\pi}{6}$.

b. $|a| = 3$, $\arg(a) = \dfrac{11\pi}{12}$;

$|b| = 1$, $\arg(b) = \dfrac{11\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}$;

$|c| = 2$, $\arg(c) = \dfrac{11\pi}{12} + \pi$;

$|d| = 4$, $\arg(d) = \dfrac{11\pi}{12} - \dfrac{\pi}{2}$;

$|e| = 1$, $\arg(e) = -\dfrac{\pi}{2}$.

92 **a.** $-x - iy = -z$; $ix - y = iz$; $-ix + y = -iz$. Tous sont de module *r*.

$\arg(-z) = \theta + \pi$; $\arg(iz) = \theta + \dfrac{\pi}{2}$; $\arg(-iz) = \theta - \dfrac{\pi}{2}$.

b. $x - iy = \bar{z}$; $-x + iy = -\bar{z}$; $ix + y = i\bar{z}$;
$-ix - y = -i\bar{z}$. Tous sont de module *r*.

$\arg(\bar{z}) = -\theta$; $\arg(-\bar{z}) = -\theta + \pi$; $\arg(i\bar{z}) = -\theta + \dfrac{\pi}{2}$; $\arg(-i\bar{z}) = -\theta - \dfrac{\pi}{2}$.

94 **a.** $|z_A| = 2 = |z_B|$; $\arg(z_A) = \dfrac{2\pi}{3} = -\arg(z_B)$;
$z_C = 2$, donc $|z_C| = 2$ et $\arg(z_C) = 0$.
b. $AB = AC = BC = 2\sqrt{3}$.
c. Le triangle est équilatéral.

95 **a.** On pose A(3 – i), B(–2 + 3i) et M(*z*).
MA = MB donc M décrit la médiatrice de [AB].
b. $z = x + iy$ et $|z - 3 + i|^2 = |z + 2 - 3i|^2$
$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = (x+2)^2 + (y-3)^2 \Leftrightarrow$
$-6x + 2y + 10 = 4x - 6y + 13 \Leftrightarrow 10x - 8y + 3 = 0$.
La droite Δ d'équation $10x - 8y + 3 = 0$ passe par le milieu $I\left(\dfrac{1}{2} ; 1\right)$ de [AB] et est perpendiculaire à (AB).

96 **1.** $|z_A| = 2\sqrt{2}$, $\arg(z_A) = -\dfrac{\pi}{4}$; $|z_B| = 2$, $\arg(z_B) = -\dfrac{5\pi}{6}$; $|z_C| = \sqrt{3}$, $\arg(z_C) = -\dfrac{\pi}{3}$.

2. a. $z_D = -2i\sqrt{3}$.

b. $|z_D| = |z_B \times \overline{z_C}| = 2\sqrt{3}$;

$\arg(z_D) = \arg(z_B) - \arg(z_C) = -\frac{\pi}{2}$.

98 **a.** $|a| = 2$, $\arg(a) = -\frac{\pi}{6}$; $|b| = 2\sqrt{2}$, $\arg(b) = \frac{\pi}{4}$.

b. $|a^4| = 16$, $\arg(a^4) = -4\frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$;

$|b^3| = 16\sqrt{2}$, $\arg(b^3) = 3\frac{\pi}{4}$;

$|\bar{b}| = 2\sqrt{2}$, $\arg(\bar{b}) = -\frac{\pi}{4}$;

$|(\frac{a}{b})^3| = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\arg((\frac{a}{b})^3) = \frac{\pi}{4}$.

100 $a = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$; $b = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

101 $a = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$; $b = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

102 $a = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; $b = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

103 $a = 3i$; $b = -2i$; $c = -1$.

104 $a = 3e^{i\pi}$; $b = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$; $c = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$.

105 **a.** $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$; $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b. $Z = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$.

c. $Z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i$.

d. $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

106 **a.** $z = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

b. $a = 6\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$; $b = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$; $c = 4\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$;

$d = 8\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$; $e = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

107 **a.** $-z = re^{i(\theta+\pi)}$; $iz = re^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$; $-iz = re^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$.

b. $\bar{z} = re^{-i\theta} = \bar{z} = re^{i(-\theta+\pi)}$; $i\bar{z} = re^{i(-\theta+\frac{\pi}{2})}$;

$-i\bar{z} = re^{i(-\theta-\frac{\pi}{2})}$.

108 $\cos\alpha - i\sin\alpha = e^{-i\alpha}$; $\sin\alpha + i\cos\alpha = e^{i(-\alpha+\frac{\pi}{2})}$;

$-\sin\alpha + i\cos\alpha = e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})}$.

109 **a.** $-2e^{i\theta} + 2e^{-i\theta}$. **b.** -4.

111 $\cos(2x - \frac{\pi}{2}) = 2\sin x \cdot \cos x$;

$\sin(\frac{\pi}{2} - 2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.

S'entraîner

112 On pose $Z = 3z^2 + z\bar{z} + 6i\sqrt{2} \Leftrightarrow$
$Z = 3(x^2 - y^2 + 2ixy) + x^2 + y^2 + 6i\sqrt{2}$.
$\text{Re}(Z) = 4x^2 - 2y^2 = 2(\sqrt{2}x - y)(\sqrt{2}x + y)$;
$\text{Im}(Z) = 6(xy - \sqrt{2})$.
Ainsi $Z = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(Z) = \text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{2}x$ et $x^2 = 1$ ou $y = -\sqrt{2}x$ et $x^2 = -1$ donc $S = \{1 + i\sqrt{2} ; -1 - i\sqrt{2}\}$.

113 Dans l'exemplaire élève, l'énoncé a été modifié : la première équation à résoudre est $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$.
$(z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1) = (z^2 + 1)^2 - 2z^2 = z^4 + 1$.
$S = \{\frac{1}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$; $\frac{1}{2}(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$; $\frac{1}{2}(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})$; $\frac{1}{2}(-\sqrt{2} - i\sqrt{2})\}$.

114 $\Delta = -\cos^2\theta \cdot \sin\theta \leqslant 0$; $\Delta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$.
$S = \{2 - i\tan\theta ; 2 + i\tan\theta\}$.

115 **a.** $P(-1) = -1 - 3 - 3 + 7 = 0$.
b. $(z + 1)(z^2 + az + b) = z^3 + az^2 + bz + z^2 + az + b = z^3 - 3z^2 + 3z + 7 \Leftrightarrow a + 1 = -3$, $b + a = 3$ et $b = 7 \Leftrightarrow a = -4$ et $b = 7$.
c. $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = -1$ ou $z^2 - 4z + 7 = 0$.
$S = \{-1 ; 2 + i\sqrt{3} ; 2 - i\sqrt{3}\}$.

116 **a.** $P(-i) = i + 16 - i - 89i - 16 + 89i = 0$.
b. $(z + i)(z^2 + az + b) = z^3 + az^2 + bz + iz^2 + iaz + ib = P(z) \Leftrightarrow a + i = -16 + i$, $b + ia = 89 - 16i$ et $ib = 89 \Leftrightarrow a = -16$ et $b = 89$.
c. $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = -i$ ou $z^2 - 16z + 89 = 0$.
$S = \{-i ; 4 + 5i ; 4 - 5i\}$.

117 **a.** $P(i\alpha) = -i\alpha^3 - 2(1 - i)\alpha^2 + (1 - 4i)i\alpha - 2i = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(P(i\alpha)) = \text{Im}(P(i\alpha)) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$.
b. $(z - 2i)(z^2 + az + b) = z^3 + az^2 + bz - 2iz^2 - iaz - 2ib = P(z) \Leftrightarrow a - 2i = 2 - 2i$, $b - 2ia = 1 - 4i$ et $-2ib = -2i \Leftrightarrow a = 2$ et $b = 1$.
c. $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = -i$ ou $z^2 + 2z + 1 = 0$.
$S = \{-2i ; 1\}$.

118 **a.** $P(3) = 0$.
b. $P(z) = (z - 3)(z^2 - 4iz - 3)$.
c. $z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z = i$ ou $z = -i$.
d. $Q(z - 2i) = (z - 2i)^2 + 1 = z^2 - 4iz - 3$.
Ainsi $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 3$ ou $Q(z - 2i) = 0$. On a donc $S = \{3 ; i ; 3i\}$.

119 **a.** $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 = a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$.
b. $z^3 - 8 = (z - 2)(z^2 + 2z + 4)$.
$z^3 = 8 \Leftrightarrow z = 2$ ou $z = -1 + i\sqrt{3}$ ou $z = -1 - i\sqrt{3}$.
$|2 - (-1 + i\sqrt{3})| = |2 - (-1 - i\sqrt{3})| = |(-1 + i\sqrt{3}) - (-1 - i\sqrt{3})| = 2\sqrt{3}$.

120 Dans l'exemplaire élève, l'énoncé a été modifié : **b.** Soit $u \neq -1$ un nombre complexe.

a. $z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)$. On a donc S = {1 ; –1 ; i ; –i}

b. $z = \dfrac{u-1}{u+1} \Leftrightarrow z(u + 1) = u - 1 \Leftrightarrow u(1 - z) = z + 1$ $\Leftrightarrow u = \dfrac{z+1}{1-z}$.

c. -1 n'est pas solution et $(u - 1)^4 = (u + 1)^4 \Leftrightarrow$ $z^4 = 1$ et $z \neq 1$. Donc $u = 0$ ou $u = \dfrac{i+1}{1-i} = i$ ou $u = \dfrac{-i+1}{1+i} = -i$.

121 **a.** S = {1 ; –1 ; i ; –i} (voir exercice 120).

b. $(z - 1)(z^3 + z^2 + z + 1) =$ $z^4 + z^3 + z^2 + z - (z^3 + z^2 + z + 1) = z^4 - 1$.

c. $Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0 \Leftrightarrow Z^4 = 1$ et $Z \neq 1 \Leftrightarrow$ $Z \in \{-1 ; i ; -i\}$. $(\dfrac{z+i}{z-i})^3 + (\dfrac{z+i}{z-i})^2 + \dfrac{z+i}{z-i} + 1 = 0$ $\Leftrightarrow \dfrac{z+i}{z-i} \in \{-1 ; i ; -i\}$ (voir exercice 120).
Donc $z \in \{0 ; 1 ; -1\}$.

122 La fonction considérée dans l'exercice s'appelle P et non f.

a. $P(z) = (z^2 + 4)(z^2 - \sqrt{2}z - 4)$.

b. $S = \{-2i ; 2i ; -\sqrt{2} ; 2\sqrt{2}\}$.

c. $a = 2\sqrt{2}$, $b = 2i$, $c = -\sqrt{2}$, $d = -2i$, sont les affixes de A, B, C, D.

Une figure suggère que $I(\frac{1}{2}\sqrt{2} ; 0)$ milieu de [AC] est le centre du cercle. On vérifie que

$IA = IB = IC = ID = 3\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

123 Dans l'exemplaire élève, la question **c.** a été modifiée : on veut montrer que les solutions de $P(z) = 0$ sont les affixes des sommets d'un triangle rectangle (pas isocèle).

a. $P(i) = 0$.

b. $P(z) = (z - i)(z^2 - 2z + 2)$.

c. $a = i$, $b = 1 + i$, $c = 1 - i$ sont les affixes respectives des sommets d'un triangle ABC rectangle en B.

124 **a.** Vrai : $OA = AB = \sqrt{29}$, $OB = \sqrt{58}$ donc d'après le théorème de Pythagore, OAB est rectangle et isocèle.

b. Vrai : Soit A(i), B(–2i). MA = MB donc (Δ), médiatrice de [AB], a pour équation $y = -\dfrac{1}{2}$.

c. Faux : $\arg(3 + i\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{6}$, donc

$\arg(z^{3n}) = 3n\dfrac{\pi}{6} = n\dfrac{\pi}{2}$. Ainsi z^{3n} est imaginaire pur pour n impair, réel pour n pair.

d. Vrai : si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $z = ki$, $k > 0$ et $|i + z| = 1 + |z| = 1 + k$.

e. Vrai : si $|z| = 1$ alors $\dfrac{1}{z^2} = \bar{z}^{\,2}$ et $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ est un réel.

125 **1.** d. ; **2.** c. ; **3.** c.

126 $z'\bar{z} = (x' + iy')(x - iy) = (xx' + yy') + i(xy' - yx')$.

a. $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow xx' + yy' = 0$ $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z'\bar{z}) = 0$.

b. O, M et M′ alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $xy' - yx' = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z'\bar{z}) = 0$.

127 **1.** $(b - m) = i(a - m) \Leftrightarrow m(1 - i) = b - ia$ donc $m = \dfrac{b-ia}{1-i}$; $n = \dfrac{c-ib}{1-i}$; $p = \dfrac{d-ic}{1-i}$; $q = \dfrac{a-id}{1-i}$.

2. $p - m = \dfrac{d-b-i(c-a)}{1-i}$ et $q - n = \dfrac{a-c-i(d-b)}{1-i} = -i(p - m)$ donc
$|p - m| = |q - n|$ et $\arg(p - m) = \arg(i(q - n))$.
Ainsi MP = QN et $\overrightarrow{MP}$ est orthogonal à $\overrightarrow{NQ}$.

3. a. $2k = a + c$; $2l = b + d$; $2u = m + p$; $2v = n + q$. Donc $2l - 2ki = b + d - i(a + c) =$ $(1-i)(m + p)$ et $2k - 2li = a + c - i(b + d) =$ $(1 - i)(n + q)$ donc $m + p = (1 + i)(l - ik)$ et $n + p = (1 + i)(k - il)$.

b. ABCD parallélogramme ⇔ K = L ⇔ $m + p = k(1 + i)(1 - i) = n + p$ ⇔ U = V ⇔ MNPQ est un parallélogramme.

c. $2(u + v) = m + n + p + q = b + c + d + a = 2(l + k)$; $2(u - v) = m + p - n - q = i(b + d - a - c) = 2i(l - k)$.
[UV] et [KL] ont même milieu, $UV = |u - v| =$ $|i(l - k)| = |l - k| = KL$ et (UV) et (KL) sont orthogonales.
ULVK a des diagonales de même milieu, de même longueur et orthogonales. C'est donc un carré.

128 Dans l'exemplaire élève, l'énoncé a été modifié : on veut montrer que le triangle **K**MN est rectangle isocèle en K.
On supposera que AMB et CNA sont directs donc $a - m = i(b - m)$ et $c - n = i(a - n)$ d'où
$m = \dfrac{a-ib}{1-i}$, $n = \dfrac{c-ia}{1-i}$, $k = \dfrac{b+c}{2}$.
$m - k = \dfrac{2(a-ib)-(b+c)(1-i)}{2(1-i)} =$
$\dfrac{2a-ib+ic-b-c}{2(1-i)}$;

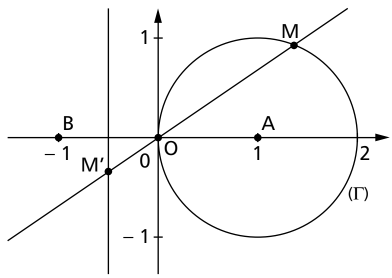
$n - k = \dfrac{2(c - \mathrm{i}a) - (b + c)(1 - \mathrm{i})}{2(1 - \mathrm{i})} =$
$\dfrac{-2\mathrm{i}a - b + c + \mathrm{i}b + Ic}{2(1 - \mathrm{i})}$;
$m - k = \mathrm{i}(n - k)$ donc MNK est rectangle isocèle en K.

129 **1. a.** $z_{A'} = \mathrm{i}z_A = -1 + \mathrm{i}(1 + \sqrt{2})$.
OAA′ est rectangle isocèle en O.
b. $z_A - z_I = 1 + \sqrt{2} - \mathrm{i}$; $z_{A'} - z_I = -1 - \mathrm{i}(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2})(z_A - z_I)$. Or $1 - \sqrt{2}$ est un réel négatif donc A, I et A′ sont alignés.
2. a. M, I et M′ sont alignés si et seulement si il existe un réel k tel que $z - 2\mathrm{i} = k(\mathrm{i}z - 2\mathrm{i}) = \mathrm{i}k(z - 2)$. (1)
(1) signifie que (CM) et (BM) sont perpendiculaires, donc M est sur le cercle (G) de diamètre [BC], de centre Ω d'affixe $\omega = 1 + \mathrm{i}$ et de rayon $\sqrt{2}$.
b. $\Omega A = \sqrt{2}$ donc A appartient à (G).
c. $f(\Omega)M' = |\mathrm{i}z - \mathrm{i}\omega| = |\mathrm{i}(z - \omega)| = |z - \omega|$ donc $\Omega M = \sqrt{2} \Leftrightarrow f(\Omega)M' = \sqrt{2}$.
3. a. A(a), B(b), A′(ia), B′(ib). $b' - a' = \mathrm{i}(b - a)$ donc (AB) et (A′B′) sont perpendiculaires.
b. $b - a = 1 - \sqrt{2} + \mathrm{i} = (\sqrt{2} - 1)\mathrm{i}a$ donc (OA) et (AB) sont perpendiculaires. (AB) = (AC) et (A′C) = (A′B′). OACA′ a trois angles droits et OA = OA′. C'est donc un carré.

130 **1.** $a - b = 4 - 2\mathrm{i}$, $a - c = -4 - 8\mathrm{i} = -2\mathrm{i}(b - a)$ donc ABC est rectangle en A.
2. $d - c = 9 + 3\mathrm{i} = 3\mathrm{i}(1 - 3\mathrm{i}) = 3\mathrm{i}(d - b)$ donc BCD est rectangle en D.
A, B, C, D sont situés sur le cercle de diamètre [BC], de centre I(3 – 4i) et de rayon IA = 5.
3. a. $a' = \dfrac{10}{a}\mathrm{i} = 1 + 3\mathrm{i}$; $b' = \dfrac{10}{b}\mathrm{i} = \dfrac{-1 + 7\mathrm{i}}{5}$,
$c' = \dfrac{10}{c}\mathrm{i} = \dfrac{-7 - \mathrm{i}}{5}$.
b. $c' - a' = \dfrac{-12 - 16\mathrm{i}}{5} = 2\dfrac{-6 - 8\mathrm{i}}{5} = 2(b' - a')$ donc A′, B′, C′ sont alignés.

131 **1.** $k = 1 + \mathrm{i}$; $k' = -\dfrac{k^2}{k - \mathrm{i}} = -2\mathrm{i}$.
2. a. $l = \dfrac{\mathrm{i}}{2}$; $l' = l$ donc L = L′.
b. $z' = z \Leftrightarrow z(z - \mathrm{i}) = -z^2 \Leftrightarrow z(2z - \mathrm{i}) = 0$. Il existe donc deux points invariants par f, L et O.
3. a. $3g = \mathrm{i} + z + z' = \dfrac{(z + \mathrm{i})(z - \mathrm{i}) - z^2}{z - \mathrm{i}}$ donc
$g = \dfrac{1}{3(z - \mathrm{i})}$.
b. Si AM = r, alors $|z - \mathrm{i}| = r$ et $|g| = \mathrm{OG} = \dfrac{1}{3r}$.
c. $\arg(g) = -\arg(z - \mathrm{i}) = -(\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}})$.
d. Le centre de gravité D du triangle ADD′ est sur le cercle de centre O de rayon 1 et $(\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{OG}}) = -(\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{AD}})$.
Soit I le milieu de [AD]. On a $\overrightarrow{ID} = 3\overrightarrow{IG}$.

132 $z' = -\dfrac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow z'\bar{z} = -1$ et $z \neq 0$.
A. 1. $|z'\bar{z}| = |-1|$ donc $|z'| \cdot |\bar{z}| = 1$.
$\arg(z'\bar{z}) = \arg(-1)$ donc $\arg(z') - \arg(z) = \pi$.
2. $(\widehat{\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OM'}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM}\,;\vec{u}}) + (\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'}}) =$
$\arg(z') - \arg(z) = \pi$. Donc O, M et M′ sont alignés.
3. $\overline{z' + 1} = \bar{z} + 1 = -\dfrac{1}{z} + 1 = \dfrac{1}{z}(z - 1)$.
B. 1. $|z - 1| = 1 \Leftrightarrow \mathrm{AM} = 1$ donc (Γ) est le cercle de centre A et de rayon 1.
2. a. $|z - 1| = 1$ donc $|\overline{z' + 1}| = |\dfrac{1}{z}(z - 1)| =$
$|-\dfrac{1}{\bar{z}}| \cdot |z - 1| = |z'|$. Donc BM′ = OM′, i.e M′ est situé sur la médiatrice de [OB]
b. $|z' + 1| = |z'| \cdot |z - 1|$ donc si $|z' + 1| = |z'|$, alors $|z - 1| = 1$.
c. Si M est un point de (Γ), alors M′ est à l'intersection de la droite (OM) et de la médiatrice de [OB].



133 On pose $a = \mathrm{i}$, $b = 1 + \mathrm{i}$ et $c = -1 + \mathrm{i}z' = \dfrac{\mathrm{i}z + 2}{z - \mathrm{i}}$.
1. a. $b' = \dfrac{\mathrm{i}b + 2}{b - \mathrm{i}} = \mathrm{i}(1 + \mathrm{i}) + 2 = 1 + \mathrm{i} = b$;
$c' = -\mathrm{i}(-1 + \mathrm{i}) - 2 = -1 + \mathrm{i} = c$.
b. $(z' - \mathrm{i})(z - \mathrm{i}) = \mathrm{i}z + 2 - \mathrm{i}(z - \mathrm{i}) = \mathrm{i}z + 2 - \mathrm{i}z - 1 = 1$
c. $(d' - \mathrm{i})(d - \mathrm{i}) = 1$ donc par module, AD′·AD = 1 et par argument, $\arg(d' - \mathrm{i}) = -\arg(d - \mathrm{i})$ donc $(\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{AD'}}) = -(\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{AD'}})$.
D′ est donc situé sur le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{1}{\mathrm{AD'}}$ et tel que $(\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{AD'}}) = -(\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{AD'}})$.
2. AM = R et AM·AM′ = 1 donc AM′ = $\dfrac{1}{R}$. L'image par f du cercle de centre A et de rayon R est le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{1}{R}$.

3. a. Si $z = k\mathrm{i}$, $k \neq 1$ et $z - \mathrm{i} = \mathrm{i}(k-1)$ donc

$z' - \mathrm{i} = \dfrac{1}{z - \mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}}{1-k}$ donc $z' = \mathrm{i} + \dfrac{\mathrm{i}}{1-k}$ donc l'image de l'axe imaginaire privé du point A est lui-même, avec $z' \neq \mathrm{i}$.

b. $M \in \mathscr{D}$ donc $(\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}}) = 0$ ou π et $(\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{AM'}}) = 0$ ou π donc l'image de la droite D privée du point A est elle même.

134 Dans l'exemplaire élève, l'énoncé commence par « Soient A d'affixe i et B d'affixe 2. »

1. $z' = z \Leftrightarrow \mathrm{i}z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \mathrm{i}$. f a un unique point invariant A d'affixe i.

2. a. $z' - z = \mathrm{i}z + 1 = -\mathrm{i}(-z + \mathrm{i})$ donc si $z \neq \mathrm{i}$,

$\dfrac{z' - z}{\mathrm{i} - z} = -\mathrm{i}$.

$\left|\dfrac{z'-z}{\mathrm{i}-z}\right| = |-\mathrm{i}| = 1$ donc $MM' = MA$ et donc M′ est situé sur le cercle de centre M passant par A.

$\arg \dfrac{z'-z}{\mathrm{i}-z} = -\dfrac{\pi}{2}$ donc $(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MM'}}) = -\dfrac{\pi}{2}$.

3. a. $z' - 3 - 2\mathrm{i} = (1+\mathrm{i})z + 1 - 3 - 2\mathrm{i} = (1+\mathrm{i})$ $z - 2(1+\mathrm{i}) = (1+\mathrm{i})(z-2)$.

b. Si $BM = |z - 2| = \sqrt{5}$, et C d'affixe $3 + 2\mathrm{i}$, alors $CM' = |z' - 3 - 2\mathrm{i}| = |1 + \mathrm{i}|\ \sqrt{5} = \sqrt{10}$ donc M′ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre C, de rayon $\sqrt{10}$.

c. A est invariant, il se situe donc à l'intersection des deux cercles. $C = f(B)$ donc ABC est rectangle isocèle en B et l'autre point commun est le symétrique de A par rapport à B.

135 **1. a.** On note p l'affixe de P et p' l'affixe de P′. Si $p = 1 + \mathrm{i}$, alors $p' = -1 - \mathrm{i}$.

b. $p - a = -1 + \mathrm{i}$ et $p' - b' = 1 - \mathrm{i} = -(p - a)$ donc (AP) et (BP′) sont parallèles.

c. $p' - p = 2(-1 - \mathrm{i}) = 2\mathrm{i}(p - a)$ donc (AP) et (PP′) sont perpendiculaires.

2. $z' = z \Leftrightarrow z(\bar{z} - 2) = \bar{z}(z - 2) \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z$ réel.
L'axe réel est l'ensemble des points invariants par f.

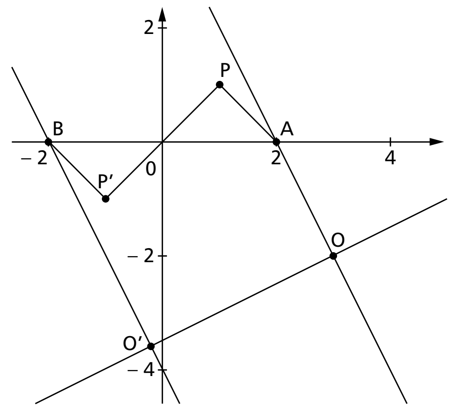
3. a. $(z-2)(\bar{z}-2) = (z-2)(\overline{z-2}) = |z-2|^2$ est réel.

b. $z' + 2 = \dfrac{\bar{z}z - 4}{\bar{z} - 2}$ donc $\dfrac{z'+2}{z-2} = \dfrac{\bar{z}z - 4}{|z-2|^2} = k$ est réel.

c. $\overrightarrow{BM'} = k\overrightarrow{AM}$ donc les droites (AM) et (BM′) sont parallèles.

4. $z' - z = \dfrac{2(\bar{z} - z)}{\bar{z} - 2}$ donc $\dfrac{(z'-z)}{z-2} = \dfrac{2(\bar{z}-z)}{|z-2|^2}$ est un imaginaire pur donc (AM) et (MM′) sont perpendiculaires.

5. M′ est à l'intersection de la parallèle à (AM) passant par B et de la perpendiculaire à (AM) passant par M.



136 **1.** $\mathrm{Z} = \dfrac{x^2 - 2x + y^2 + 3y + 2}{x^2 + (y+2)^2} + \dfrac{-x + 2y + 4}{x^2 + (y+2)^2}\mathrm{i}$.

a. Z réel $\Leftrightarrow$ $-x + 2y + 4 = 0$. E est la droite d'équation $-x + 2y + 4 = 0$, privée de B(0 ; –2).

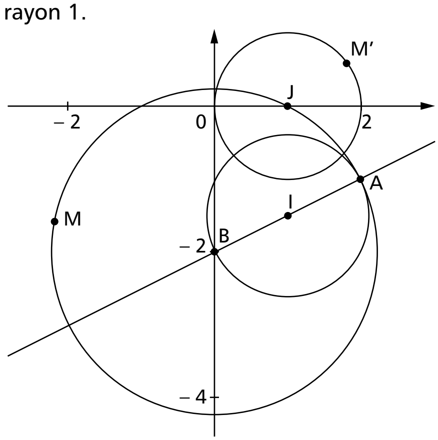
b. Z imaginaire pur $\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4} = 0$, avec $(x\,;y) \neq (0\,;-2)$.

F est le cercle de centre $\mathrm{I}\left(1\,;-\dfrac{3}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ privé de B(0 ; –2).

2. Z réel $\Leftrightarrow z - a = k(z - b)$, avec $k \in \mathbb{R}$ et $z \neq b$, $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ colinéaires, avec $M \neq B$. Par conséquent E est la droite (AB) privée de B.

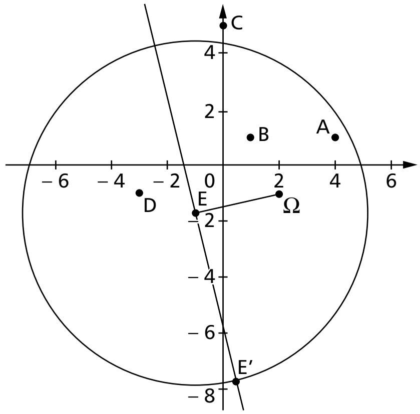
Si $z = a$, Z = 0 est imaginaire pur. Si $z \neq A$ et $z \neq B$, Z imaginaire pur $\Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{BM}}) = \dfrac{\pi}{2} + kp$ donc F est le cercle de diamètre [AB] privé de B.

3. $|\mathrm{Z} - 1|\cdot|z + 2\mathrm{i}| = |z - 2 + \mathrm{i} - z - 2\mathrm{i}| = |-2 - \mathrm{i}| = \sqrt{5}$ donc si $BM = |z + 2\mathrm{i}| = \sqrt{5}$ et J(1) alors $JM' = 1$ et M′ est situé sur le cercle de centre J et de rayon 1.



137 Dans l'exemplaire élève, l'énoncé a été modifié : $z_D = \mathbf{-3} - \mathrm{i}$.

1. a. $z_{A'} = 5i = z_C$; $z_{B'} = -3 - i = z_D$.
b. $z' = z \Leftrightarrow 2iz = 2 + 4i \Leftrightarrow z = 2 - i$. f a un unique point invariant Ω, d'affixe $\omega = 2 - i$.
2. a. $z' - z = 2iz - 2 - 4i = -2i(2 - i - z) = -2i(\omega - z)$.
b. Pour $z \neq \omega$, $\dfrac{z' - z}{\omega - z} = -2i$ donc par module et argument, pour $M \neq \Omega$, $\dfrac{MM'}{\Omega M} = 2$, et $(\widehat{\overrightarrow{M\Omega} ; \overrightarrow{MM'}}) = -\dfrac{\pi}{2}$.
c. $\Omega MM'$ est rectangle en M.
3. $z_E = -1 - i\sqrt{3} = 2(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3}))$. E′ est situé sur le cercle de centre M et de rayon $2\Omega M$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{M\Omega} ; \overrightarrow{MM'}}) = -\dfrac{\pi}{2}$.

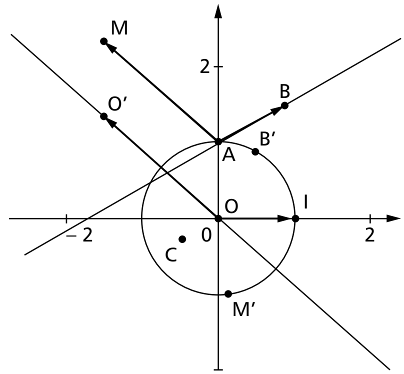


138 **a.** $S = \{e^{ia} ; e^{-ia}\}$ **b.** $S = \{e^{i(\frac{\pi}{2} - a)} ; e^{-i(\frac{\pi}{2} - a)}\}$

139 **1.** a est réel donc $\bar{a} = a$, $\bar{b} = -b$ et $P(z_0) = 0$.
$P(-\bar{z}_0) = -a\bar{z}_0^3 + b = -\bar{a}\,\bar{z}_0^3 - \bar{b} = -(\overline{az_0^3 + b}) = 0$;
$P(z) = z^3 + i$.
2. a. $z_A = P(0) = i$.
b. $P(z_A) = -i + i = 0$ donc $f(A) = O$.
3. a. $P(z_B) = (e^{-i\frac{\pi}{6}})^3 + i = -i + i = 0$ donc $f(B) = 0$.
b. $P(-\bar{z}_B) = 0$ donc $f(B') = O$ avec B′ d'affixe $-e^{i\frac{\pi}{6}}$.

140 **1.** Soit B d'affixe b et B' d'affixe b'. Si $b = 2 - i$, alors $b' = -i$.
2. $z = z' \Leftrightarrow z(\bar{z} + i) - z + i = 0$, avec $z \neq i \Leftrightarrow z = x + iy$ et $x^2 + y^2 + ix - y - x - iy + i = 0$, avec $(x ; y) \neq (0 ; 1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - y - x = 0$ et $x - y + 1 = 0$, avec $(x ; y) \neq (0 ; 1)$.
Or si $y = x + 1$, alors $x^2 + (x + 1)^2 - (x + 1) - x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Et si $x = 0$, alors $y = 1$. Or $(x, y) \neq (0, 1)$, il n'y a donc pas de point invariant.

3. a. $OM' = |z'|$; or $|\bar{z} + i| = |\overline{z - i}| = |z - i|$ donc $OM' = 1$.
M′ est donc situé sur le cercle de centre O et de rayon 1.
b. $\arg(\bar{z} + i) = \arg(\overline{z - i}) = -\arg(z - i)$ donc $\arg(z') = 2\arg(z - i)$ et pour $M \neq A$,
$(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = 2(\vec{u}, AM) + 2kp$.
c. On construit M′ à l'intersection du cercle de centre O de rayon 1 et de la demi-droite [OM′) telle que $(\widehat{\vec{u} ; \overrightarrow{OM}}) = 2(\widehat{\vec{u} ; \overrightarrow{AM}})$.
4. $M' \in (d) \Leftrightarrow (\widehat{\vec{u} ; \overrightarrow{AM}}) = (u ; w) + k\pi$ donc $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM'}}) = 2(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) + k2\pi = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ et $OM' = 1$. Par conséquent l'image de (d) est le point B′ d'affixe $e^{i\frac{\pi}{3}}$.



141 Dans l'exemplaire élève, l'énoncé de la question **2.** a été modifié : dans l'expression de (E), x est remplacé par α.
1. $\tan' x = 1 + \tan^2 x > 0$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires, tan est une fonction continue strictement croissante, et tout réel a un unique antécédent sur $]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}[$.
2. $|a| = |\bar{a}|$ donc $|1 - i\cdot\tan\alpha| = |1 + i\cdot\tan\alpha|$ et pour a et b réels, $a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b$ donc si $(1 + iz)^3(1 - i\cdot\tan\alpha) = (1 - iz)^3(1 + i\cdot\tan\alpha)$ alors $|1 + iz| = |1 - iz|$.
Ainsi $|1 + iz| = |1 - iz| \Leftrightarrow |1 + iz|^2 = |1 - iz|^2 \Leftrightarrow (1 + iz)(1 - i\bar{z}) = (1 - iz)(1 + i\bar{z}) \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z$ est réel.
3. a. $\dfrac{1 + i\tan x}{1 - i\tan x} = \dfrac{\cos x + i\sin x}{\cos x - i\sin x} = e^{2ix} = (e^{ix})^2$.
b. D'après **1.** $z = \tan(\varphi)$.

c. (E) $\Leftrightarrow \dfrac{1+\mathrm{i}\tan\alpha}{1-\mathrm{i}\tan\alpha} = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}\tan\varphi}{1-\mathrm{i}\tan\varphi}\right)^3 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} = \mathrm{e}^{6\mathrm{i}\varphi} \Leftrightarrow$

$6\varphi = 2\alpha + k2\pi \Leftrightarrow \varphi = \dfrac{\alpha}{3} + k\dfrac{2\pi}{3}$.

d. $z_1 = \tan\dfrac{\alpha}{3}$; $z_2 = \tan(\dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{2\pi}{3})$, $z_3 = \tan(\dfrac{\alpha}{3} - \dfrac{2\pi}{3})$.

142 **1. a.** $a_1 = f(a_0) = 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$; $a_2 = f(a_1) = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$; $a_3 = f(a_2) = \dfrac{1}{2}(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$.

b. Par récurrence, $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $a_0 = 8 = 2^3$.

Si $a_n = 2^{3-n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}}$ alors $a_{n+1} = 2^{3-n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+1)\pi}{3}}$.

2. a. $r_n = |a_n| = 2^{3-n}$. (r_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, de premier terme 8.

b. $r_n \leqslant 10^{-2} \Leftrightarrow 2^{3-n} \leqslant 10^{-2} \Leftrightarrow (3-n)\ln 2 \leqslant -2\ln(10)$ $\Leftrightarrow n \geqslant 3 + \dfrac{2\ln(10)}{\ln 2}$, soit pour $n \geqslant 10$.

3. a. $l_1 = |a_1 - a_0| = |-6 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}| = 4l_n$;
$l_2 = 2\sqrt{3}$; $l_3 = \sqrt{3}$.
(l_n) semble géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

b. $a_{n+1} - a_n = (\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} - 1)\cdot a_n = a_n \cdot \dfrac{-3+i\sqrt{3}}{4}$ donc $l_n = 4\sqrt{3}2^{-n}$.

4. $L_n = l_0 + l_1 + \ldots + l_{n-1} = 4\sqrt{3}$
$(1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-(n-1)}) = 4\sqrt{3}(1 - 2^{-n})\cdot 2 = 8\sqrt{3}(1 - 2^{-n})$. $0 < 2^{-1} < 1$ donc $\lim 2^{-n} = 0$ et $\lim L_n = 8\sqrt{3}$.

143 **1. a.** En développant,
$(1 - z)(1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}) = 1 - z^n$.

b. $z^n = 1 \Leftrightarrow 1 - z^n = 0 \Leftrightarrow z = 1$ ou
$1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = 0$.

2. $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}$ donc $|\omega| = 1 = \omega\cdot\bar{\omega}$.

a. $\omega^5 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1$; $\omega^4 = \omega^5\bar{\omega} = \bar{\omega}$; $\omega^3 = \omega^4\bar{\omega} = \bar{\omega}^2$.

b. $\omega \neq 1$ et $\omega^5 = 1$.
$u + v = uv = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = -1$.

c. $u(1 - u) = v(-1 - v) = -1$ donc u et v sont solutions de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

d. $u = \omega + \bar{\omega} = 2\mathrm{Re}\omega = 2\cos\dfrac{2\pi}{5} > 0$ et $v = \omega^2 + \bar{\omega}^2 = 2\mathrm{re}(\omega^2) = 2\cos(\dfrac{4\pi}{5}) < 0$ donc $\cos(\dfrac{2\pi}{5}) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

et $\cos\dfrac{4\pi}{5} = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

3. a. $\omega^5 = 1$ donc $\omega^{5+i} = \omega^i$ donc $A_i = A_{i+5}$.
$A_1(\cos\dfrac{2\pi}{5}$; $\sin\dfrac{2\pi}{5})$.

b. $OA_i = |\omega^i| = 1$ et $A_iA_{i+1} = |\omega^{i+1} = \omega^i| = |\omega^i|\cdot|\omega - 1| = |\omega - 1|n$, qui ne dépend pas de i.

4. Pour construire le pentagone régulier ABCDE, on considère que l'affixe de A est 1 et que celle de B est ω.

K a pour affixe $-\dfrac{1}{2}$ donc $\mathrm{JK} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Le cercle de centre K et de rayon KJ coupe le segment [KA] en U. $\mathrm{KU} = \mathrm{JK} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ donc $\mathrm{OU} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$; I est le milieu de [OU] et a pour abscisse $\cos\dfrac{2\pi}{5}$. On construit les points du cercle B et E d'abscisse cos $\dfrac{2\pi}{5}$ et on reporte sur le cercle la longueur AB. On obtient ainsi les points C et D.

144 **1. a.** $r_n = r_0(\dfrac{1}{2})^n$.

b. $\theta_n = \theta_0 + \dfrac{2\pi}{3}n$.

c. $z_n = r_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n} = r_0(\dfrac{1}{2})^n\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_0 + \frac{2n\pi}{3})} = z_0 a^n$, avec $a = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

$z_0 z_1 z_2 = 8$ donc $8 = z_0{}^3 a^3$. Or $a^3 = \dfrac{1}{8}$ donc $z_0{}^3 = 64$.

$r_0{}^3 = 64$ donc $r_0 = 4$ et $3\theta_0 = k2\pi$ donc $\theta_0 = k.\dfrac{2\pi}{3}$ et $\theta_0 \in [0\,;\dfrac{\pi}{2}]$ donc $\theta_0 = 0$.

2. a. $z_0 =$; $z_1 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$; $z_2 = \dfrac{1}{2}(-1 - \mathrm{i}\sqrt{3})$.

b. $z_{n+1} = az_n$.

c. $a_n = \mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1}$ et $L_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.

$z_{n+1} - z_n = (a - 1)z_n = (\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{4} - 1)z_n = z_n\dfrac{-5+i\sqrt{3}}{4}$ donc $a_n = 2\sqrt{7}\cdot 2^{-n}$.

d. $L_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n =$
$2\sqrt{7}(1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-n}) =$
$2\sqrt{7}(1 - 2^{-n-1}) \times 2 = 4\sqrt{7}(1 - 2^{-n-1})$.
$0 < 2^{-1} < 1$ donc $\lim 2^{-n} - 0$; par conséquent $\lim a_n = 0$ et $\lim L_n = 4\sqrt{7}$.

145 Soit θ un réel de $]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}[$.

a. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta + \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta = 2\cos\theta$.
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin - \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = 2\mathrm{i}\sin\theta$.

b. $a\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + 1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = 2\cos\theta$.
$b\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} - 1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = 2\mathrm{i}\sin\theta$.
$a = 2\cos\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\cos\theta > 0$ donc $|a| = 2\cos\theta$ et $\arg(a) = \theta$.

$b = 2\mathrm{i}\sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Si $\theta \in [0\,;\dfrac{\pi}{2}[$, alors $\sin\theta > 0$ donc $|b| = 2\sin\theta$ et $\arg(b) = \theta + \dfrac{\pi}{2}$.

Si $\theta \in [-\frac{\pi}{2} ; 0[$, $\sin\theta < 0$, donc $|b| = -2\sin\theta$ et

$\arg(b) = \theta - \frac{\pi}{2}$.

Pour $\theta \in [0 ; \frac{\pi}{2}[$, $|ab| = 4\sin\theta\cos\theta$ et

$\arg(ab) = 2\theta + \frac{\pi}{2}$.

$|ab^{-1}| = \frac{1}{\tan\theta}$ et $\arg(ab^{-1}) = -\frac{\pi}{2}$.

146 **1.** Les premiers termes de la suite sont $\{1 ; 2 ; 0 ; -4 ; -8 ; -8 ; 0 ; 16 ; 32 ; 32 ; 0 ; -64 ; -128 ; -126 ; 0...\}$

La suite n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. a. $r^{n+2} = 2r^{n+1} - 2r^n \Leftrightarrow r^n(r^2 - 2r + 2) = 0$ donc si $r \neq 0$ alors $r^2 - 2r + 2 = 0$.

b. $r_1^{\,n+2} = 2\, r_1^{\,n+1} - 2\, r_1^{\,n}$ donc
$c\, r_1^{\,n+2} = 2c\, r_1^{\,n+1} - 2c\, r_1^{\,n}$ et
$d\, r_2^{\,n+2} = 2d\, r_2^{\,n+1} - 2d\, r_2^{\,n}$ donc
$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.

c. $r_1 = 1 - i$; $r_2 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $(1 - i)(1 + i) = 2$.

d. $u_0 = c + d = 1$; $u_1 = c(1 - i) + d(1 + i)$ donc

$c = \frac{1+i}{2}$; $d = \frac{1-i}{2}$ donc $u_n = (r_1^{\,n-1} + r_2^{\,n-1}) =$

$(\sqrt{2})^{n+1} \times \cos(n - 1)\frac{\pi}{4}$.

3. $r^{n+2} = r^{n+1} - 2r^n \Leftrightarrow r^n(r^2 - r + 2) = 0$ donc si $r \neq 0$ alors $r^2 - r + 2 = 0$.

Ainsi $r_1 = \frac{1-i\sqrt{7}}{2}$ et $r_2 = \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$.

On a donc $u_0 = c + d = 2$; $u_1 = cr_1 + dr_2 = -1$, et

$c = \frac{2r_1+1}{r_1 - r_2}$; $d = \frac{2r_2+1}{r_2 - r_1}$. Donc $u_n = cr_1^{\,n} + d\, r_2^{\,n}$

et $d = \bar{c}$ donc u_n est réel pour tout n.

147 $f(t) = 2\cos(3t - \frac{\pi}{6})$;

$g(t) = 2\cos(3t - \frac{\pi}{6}) + 2\cos(3t - \frac{\pi}{3}) =$

$(\sqrt{3} + 1)\sqrt{2}\cos(3t - \frac{\pi}{4})$.

$h(t) = \cos 2t - 3\cos(2t - \frac{\pi}{4}) = A\cos(2t + \varphi)$

avec $A = \sqrt{10 - 3\sqrt{2}}$, et

$\cos\varphi = \frac{2 - 3\sqrt{2}}{2\sqrt{10 - 3\sqrt{2}}}$; $\sin\varphi = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{10 - 3\sqrt{2}}}$.

148 **a.** En factorisant par $\underline{I}$, $G = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R}$.

b. $G = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_C / \underline{Z}_R}$ avec

$\frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R} = \frac{1}{iRC\omega} = \frac{1}{i\omega\tau}$ donc $G = \frac{i\omega\tau}{1 + i\omega\tau}$.

c. $|\underline{G}| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$ et $\varphi = \arg(\underline{G}) = -\arg(\frac{1-i}{\omega\tau})$.

Ainsi $\tan\varphi = \frac{1}{\omega\tau}$.

d. $G = \frac{0{,}064\omega}{\sqrt{1 + 0{,}004096\omega^2}}$.

149 **a. b.** En factorisant par $\underline{I}$ et en divisant par $\underline{Z}_C$,

$\underline{G} = \frac{1}{1 - LC\omega + i\omega RC}$

c. $G = \frac{1}{\sqrt{(1 - LC\omega)^2 + (\omega\tau)^2}}$, d'où

$\varphi = \arg(\underline{G}) = -\arg(1 - LCw + i\omega RC)$, et

$\tan\varphi = \frac{\omega RC}{1 - LC\omega}$.

d. $G = \frac{1}{\sqrt{(1 - 4{,}096.10^{-6}\omega)^2 + 0{,}004096\omega^2}}$.

Préparer le BAC

Exercices guidés BAC

156 **a.** $P(i\sqrt{3}) = P(-i\sqrt{3}) = 0$ et $P(z) = (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21)$.

b. $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21) = 0 \Leftrightarrow$ $(z^2 + 3) = 0$ ou $(z^2 - 6z + 21) = 0$.

$S = \{i\sqrt{3} ; -i\sqrt{3} ; 3 + 2i\sqrt{3} ; 3 - 2i\sqrt{3}\}$

c. Soit $\Omega(3)$. $\Omega C = \Omega D = \Omega A = \Omega B = 2\sqrt{3}$ donc A, B, C, D sont sur le cercle de centre Ω et de rayon $2\sqrt{3}$.

d. BEC semble équilatéral. Or $z_E = -z_D = -3 + 2i\sqrt{3}$, et CE = 6 = BE = BC donc BEC est bien équilatéral.

157 **1.** $z_{A'} = 0$, $z_{B'} = \frac{4 + 2i}{3}$ et $z_{C'} = -2 - i$.

2. $x' + iy' = \frac{(3 + 4i)(x + iy) + 5(x - iy)}{6}$ donc

$x' = \frac{4x - 2y}{3}$ et $y' = \frac{2x - y}{3}$.

$z = z' \Leftrightarrow \frac{4x - 2y}{3} = x$ et $\frac{2x - y}{3} = y = \frac{x}{2}$.

3. A′, B′, C′ semblent appartenir à la droite (D).

4. $y' = \frac{x'}{2}$ donc M′ appartient à la droite (D).

5. a. $\dfrac{z'-z}{z_A} = \dfrac{(-3+4i)z+5\bar{z}}{6(1+2i)}$ donc

$30\dfrac{z'-z}{z_A} = ((-3 + 4i)z + 5\,\bar{z})(1-2i) =$

$5((1 + 2i)z + (1-2i)\bar{z}) = 5(z + \bar{z} + 2i(z-\bar{z}))$ donc

$\dfrac{z'-z}{z_A} = \dfrac{z+\bar{z}}{6} + i\dfrac{z-\bar{z}}{3}$.

Or $\overline{z+\bar{z}} = z + \bar{z}$ et $\overline{z-\bar{z}} = -(z-\bar{z})$ donc $\overline{\left(\dfrac{z'-z}{z_A}\right)} =$

$\dfrac{z'-z}{z_A}$ et $\dfrac{z'-z}{z_A} = k$ est réel.

b. $z'-z = kz_A$ donc $\overrightarrow{MM'} = k\overrightarrow{OA}$ et les droites (OA) et (MM′) sont parallèles.

6. Si N est sur (D), il est invariant. Sinon son image est à l'intersection de (D) et de la parallèle à (OA) passant par M.

QCM – Vrai ou faux BAC

158 (Exercice numéroté 156 p. 293 dans l'exemplaire du professeur)

a. Vrai : $\arg(z) = \dfrac{3\pi}{4}$ donc $\arg(z^4) = 3\pi$ et donc z^4 est un réel négatif.

b. Faux : $\mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z$ imaginaire pur.

c. Vrai : $z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$ alors $z = i$ ou $z = -i$.

d. Faux : avec par exemple $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, on a $|z| = 1$ et $|z + z'| = 1$.

159 (Exercice numéroté 157 p. 293 dans l'exemplaire du professeur)

Soient z_1 et z_2 tels que $|z_1| = r_1 > 0$;
$|z_2| = r_2 > 0$ et $\arg(z_1) = a$; $\arg(z_2) = b$.
On a donc $z_1 = r_1(\cos a + i\sin a)$, et $r_1 > 0$;
$z_2 = r_2(\cos b + i\sin b)$, $r_2 > 0$;
$z_1z_2 = r_1(\cos a + i\sin a)\cdot r_2(\cos b + i\sin b) =$
$r_1r_2(\cos a\cos b - \sin a\sin b + i(\sin a\cos b + \cos a\sin b)) =$
$r_1r_2(\cos(a + b) + i\sin(a + b))$, or $r_1r_2 > 0$ donc
$|z_1z_2| = r_1r_2 = |z_1||z_2|$ et
$\arg(z_1z_2) = a + b = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

160 (Exercice numéroté 158 p. 293 dans l'exemplaire du professeur)

Dans l'exemplaire élève, l'énoncé a été modifié :

1. c. $|-iz + 1|$.

3. On cherche un argument de $(-1 + i\sqrt{3})z$ et la réponse **c.** est $-\dfrac{2\pi}{3} - 0$

1. c. $2(3 + i) + (3 - i) = 9 + i$.

2. c. $|z + i| = |-i||z + i| = |-iz + 1|$.

3. b. $\arg(-1 + i\sqrt{3}) = \dfrac{2\pi}{3}$.

4. b. $\arg(\sqrt{3} + i)^n = \dfrac{n\pi}{6} = (2k + 1)\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow n = 6k + 3$.

5. c. $|z - i| = |z + 1|$ donc OA = OB. L'ensemble des points M est la médiatrice de [AB], droite perpendiculaire à (AB) passant par O.

6. c. $\dfrac{z-2}{z-1} = z \Leftrightarrow z^2 = z = z - 2 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$
$\Leftrightarrow z \in \{1 - i\ ;\ 1 + i\}$.

Exercice BAC

161 **A.** $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$. On a $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, et $z + \bar{z} = 2x$, $z - \bar{z} = 2iy$.

1. z est imaginaire pur $\Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = -\bar{z}$.

2. z est réel $\Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$.

3. $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$.

B. 1. $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = 10$ donc
$|a| = |b| = |c|$ donc OA = OB = OC.

2. Soit h l'affixe du point H, $h = 2 - \sqrt{5} + i(4 - \sqrt{5})$.

C. 1. OA = OB = OC $\Leftrightarrow |a| = |b| = |c| \Leftrightarrow$
$|a|^2 = |b|^2 = |c|^2 \Leftrightarrow a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c}$.

2. a. $\overline{\bar{b}c} = b\bar{c}$ donc $w = b\bar{c} - \bar{b}c = 2i\mathrm{Im}(b\bar{c})$.

b. $(b + c)(\bar{b} - \bar{c}) = (b\bar{b} - c\bar{c}) + b\bar{c} - \bar{b}c = w$.

Et $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{(b+c)\overline{(b-c)}}{(b-c)\overline{(b-c)}} = \dfrac{w}{|b-c|^2}$.

c. $|b - c|^2$ est réel donc $\dfrac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur.

3. a. $z_{\overrightarrow{AH}} = h - a = b + c$ et $z_{\overrightarrow{CB}} = b - c$.

b. $\widehat{(\overrightarrow{CB}\ ;\overrightarrow{AH})} = \arg\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

c. (AH) est perpendiculaire à (BC) donc (AH) est une hauteur. On montre de même que (BH) est perpendiculaire à (AC) donc (BH) est aussi une hauteur et H est l'orthocentre de ABC.

162 **a.** $\cos\theta = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \dfrac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ et

$\sin\theta = \mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \dfrac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$.

b. • $a = 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) = e^{i\frac{\theta}{2}}(2\cos\dfrac{\theta}{2})$ donc

si $\theta \in]0\ ;\ \pi[$, $\cos\dfrac{\theta}{2} > 0$ donc $|a| = 2\cos\dfrac{\theta}{2}$ et $\arg a = \theta$.

Si $\theta \in]\pi\ ;\ 2\pi[$, $\cos\dfrac{\theta}{2} < 0$ donc $|a| = -2\cos\dfrac{\theta}{2}$ et $\arg a = \theta + \pi$.

• $b - 1 = e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) = e^{i\frac{\theta}{2}}(-2i\cdot\sin\frac{\theta}{2})$.

$|b| = 2\sin\frac{\theta}{2}$ et $\arg b = \theta - \frac{\pi}{2}$.

On a $\frac{a}{b} = \frac{i}{\tan\frac{\theta}{2}}$ donc $\frac{a}{b}$ est un imaginaire pur.

163 **a.** $\cos(n\theta) = \mathrm{Re}(e^{in\theta}) = \mathrm{Re}((e^{i\theta})^n)$ et $\sin(n\theta) = \mathrm{Im}(e^{in\theta}) = \mathrm{Im}((e^{i\theta})^n)$.

b. En développant, on obtient $(1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1})(1 - z) = 1 - z^n$.

c. $C_n = \mathrm{Re}(1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}) = \mathrm{Re}\frac{1-z^n}{1-z}$ (avec $z = e^{i\theta} \neq 1$).

Or $1 - e^{in\theta} = e^{i\frac{n\theta}{2}}(-2i\sin(n\frac{\theta}{2}))$ et $(1 - e^{i\theta}) = e^{i\frac{\theta}{2}}(-2i\sin\frac{\theta}{2})$.

Donc $\frac{1-z^n}{1-z} = e^{i\frac{(n-1)\theta}{2}}\frac{\sin(n\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}$ et

$$C_n = \cos((n-1)\frac{\theta}{2})\frac{\sin(n\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}.$$

d. $S_n = \mathrm{Im}\frac{1-z^n}{1-z} = \sin((n-1)\frac{\theta}{2})\frac{\sin(n\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}$.

164 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta) = \mathrm{Re}(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\theta}) =$

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\theta} = (1 + e^{i\theta})^n = e^{i\frac{n\theta}{2}}(2\cos\frac{\theta}{2})^n$.

Donc $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta) = \cos(n\frac{\theta}{2}) \times (2\cos\frac{\theta}{2})^n$.

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(n\theta) = \mathrm{Im}(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{in\theta}) = \sin(n\frac{\theta}{2})\cdot(2\cos\frac{\theta}{2})^n$.

165 **1. a.** On utilise la formule de l'exercice 164 pour obtenir $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

b. $\cos^5 x = (\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}))^5$

$= \frac{1}{32}(e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix})$.

c. $\cos^5 x = \frac{1}{32}(e^{5ix} + e^{-5ix} + 5(e^{3ix} + e^{-3ix}) +$

$10(e^{ix} + e^{-ix})) = \frac{1}{16}(\cos(5x) + 5\cos(3x) + 10\cos x)$.

2. $\sin^4 x = \frac{1}{16}(e^{ix} - e^{ix})^4 =$

$\frac{1}{16}(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) =$

$\frac{1}{8}(\cos(4x) - 2\cos(2x) + 3)$.

166 **a.** $\frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{2}(x - y) =$

$x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + y\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) = x$.

De même, $\frac{1}{2}(x + y) - \frac{1}{2}(x - y) =$

$y\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + x\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) = y$.

b. $e^{ix} + e^{iy} = e^{i\frac{x+y}{2}}(e^{i\frac{x-y}{2}} + e^{-i\frac{x-y}{2}}) =$

$e^{i\frac{x+y}{2}}2\cos\frac{x-y}{2}$.

On obtient $\cos x + \cos y = \mathrm{Re}(e^{ix} + e^{iy}) =$

$2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$ et $\sin x + \sin y =$

$\mathrm{Im}(e^{ix} + e^{iy}) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$.

De plus $e^{ix} - e^{iy} = e^{i\frac{x+y}{2}}(e^{i\frac{x-y}{2}} - e^{-i\frac{x-y}{2}}) =$

$e^{i\frac{x+y}{2}}2i\sin(\frac{x-y}{2})$.

On obtient $\cos x - \cos y = \mathrm{Re}(e^{ix} - e^{iy}) =$

$-2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$ et $\sin x - \sin y =$

$\mathrm{Im}(e^{ix} - e^{iy}) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$.

167 **a.** Si $z = x + iy$, alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = \mathrm{Re}(\alpha)i\mathrm{Im}(\alpha)$ et $|z^2| = |z|^2 = |\alpha| = x^2 + y^2$.

b. $x^2 - y^2 = 0$ et $x^2 + y^2 = 2$ donc $x^2 = y^2 = 1$ et $xy = 2 > 0$ donc $z = 1 + i$ ou $-1 - i$.

c. $x^2 - y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 = 2$ donc $x^2 = \frac{3}{2}$, $y^2 = \frac{1}{2}1$ et $xy = -\sqrt{3} < 0$.

Par conséquent $z = \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{2}}$ ou $z = -\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{2}}$.

168 Dans l'exemplaire élève, l'équation (E) a été modifiée : $z^2 + (2i - 3)z + \mathbf{5} - 5i = 0$ (E).

$z^2 + (2i - 3)z + 5 - 5i = 0$ (E).

$\Delta = (2i - 3)^2 - 4(5 - 5i) = -15 + 8i = (1 + 4i)^2$ donc $S = \{1 - 3i ; 2 + i\}$.

169 **a.** Si $z^n = 1$, alors $|z^n| = |z|^n = 1$ et $|z|$ est un réel positif, donc $|z| = 1$.

b. On pose $z = e^{i\theta}$ donc $e^{in\theta} = 1$ donc $n\theta = 2k\pi$ et $\theta = \frac{2k\pi}{n}$.

c. $\theta \in [0\,;\,2\pi[$ et si $u = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, alors pour tout k entier naturel de $[0\,;\,n-1[$, $u_k = u^k$ et u_k est solution de (E).

d. $A_kA_{k+1} = |u^{k+1} - u^k| = |u^k||u-1| = |u-1|$.

170 **a.** $z^5 = -i$; $|z^5| = |z|^5 = 1$ et $|z|$ est un réel positif, donc $|z| = 1$.

$z = e^{i\theta}$ et $e^{i5\theta} = -i$. Ainsi $5\theta = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc

$\theta = -\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2k\pi}{5}$ et par conséquent

$\theta \in \{-\dfrac{9\pi}{10}\,;-\dfrac{\pi}{2}\,;-\dfrac{\pi}{10}\,;\dfrac{3\pi}{10}\,;\dfrac{7\pi}{10}\}$.

b. $z^6 = 8 + 8i\sqrt{3}$, $z = re^{i\theta}$ et $|z^6| = |z|^6 = r^6 = 16$ donc $r = \sqrt[3]{4}$.

$6\theta = \arg(8 + 8i\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k\pi}{3}$.

$\theta \in \{-17\dfrac{\pi}{18}\,;-11\dfrac{\pi}{18}\,;-5\dfrac{\pi}{18}\,;\dfrac{\pi}{18}\,;7\dfrac{\pi}{18}\,;13\dfrac{\pi}{18}\}$.

171 Dans l'exemplaire élève, la question **3.** a été modifiée : on veut montrer que $(z-a)(z-\bar{a}) = z^2 - 2\mathrm{Re}(a)\boldsymbol{z} + |a|^2$.

1. Soit x réel et $f(x) = x^6 + 1$; $f'(x) = 6x^5$.
f admet un minimum de 1 en 0 donc ne s'annule pas. P n'admet aucune racine réelle.

2. a. $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$ et $P(-z) = P(z)$ donc si z est une racine de P, alors $P(z) = 0$, et $\bar{z}$ et $-z$ sont aussi des racines de P.

b. Si $P(z) = 0$, alors $z^6 = -i$, $|z^6| = |z|^6 = 1$ donc $|z| = 1$.

c. $z = e^{i\theta}$, $6\theta = \arg(-1) = \pi + 2k\pi$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}$.

Ainsi $\theta \in \left\{-5\dfrac{\pi}{6}\,;-3\dfrac{\pi}{6}\,;-\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{\pi}{6}\,;3\dfrac{\pi}{6}\,;5\dfrac{\pi}{6}\right\}$.

Les racines sont deux à deux des conjugués de module 1.

3. $(z-a)(z-\bar{a}) = z^2 - (a+\bar{a})z + a\bar{a} = z^2 - 2\mathrm{Re}(a)z + |a|^2$.
$P(z) = (z^2 + \sqrt{3}z + 1)(z^2 - \sqrt{3}z + 1)(z^2 + 1)$ en prenant $a = e^{5i\frac{\pi}{6}}$, $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $a = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

4. $z^8 = 1 \Leftrightarrow z = e^{i\theta}$,

$\theta \in \left\{\dfrac{\pi}{4}\,;-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{2}\,;-\dfrac{\pi}{2}\,;3\dfrac{\pi}{4}\,;-3\dfrac{\pi}{4}\,;0\,;\pi\right\}$. Donc

$z^8 - 1 = (z-1)(z+1)(z^2+1)(z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)$.

172 $z \in G \Leftrightarrow z = x + iy$, $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$.

a. $-z = -x - iy$ et $\bar{z} = x - iy$; $-x \in \mathbb{Z}$ et $-y \in \mathbb{Z}$, donc $-z$ et $\bar{z}$ sont aussi éléments de G.

b. $z + z' = (x + x') + (y + y')i \in G$, et
$zz' = (xx' - yy') + i(xy' + yx') \in G$.

c. Soit $z = a + ib$, alors
$z' = z^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}i = a' + ib'$.
$|a'| \leqslant 1$ et $|b'| \leqslant 1$ donc si $z' \in G$, alors a' et b' sont éléments de $\{-1, 0, 1\}$. Si $a' = 0$, alors $a = 0$ et si $b' = 0$, alors $b = 0$. Comme $zz' = 1$, on a
$a = \dfrac{a'}{a'^2 + b'^2}$ et $b = -\dfrac{b'}{a'^2 + b'^2}$ donc si $|a'| = 1$ et $|b'| = 1$ alors $a \in \mathbb{Z}$ donc les éléments de G dont l'inverse est dans G sont 1 ; –1 ; i ; –i.

173 Dans l'exemplaire élève, l'énoncé a été modifié : **c.** Montrer que $|z^n|^2$ est un élément de E. Conclure.

a. $N = a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib) = |z|^2$, avec $z = a + ib$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ donc $z \in G$.

b. $NN' = |z|^2 \cdot |z'|^2 = |zz'|^2$. Or si $z \in G$, $z' \in G$ alors $zz' \in G$, donc NN' est élément de E.

c. On montre par récurrence que $|z^n|^2 \in E$ donc si $A \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathbb{N}$, alors AB et $A^n \in \mathbb{N}$.

174 Dans l'exemplaire élève, la question **c.** a été modifiée : z_1^{-n} et z_2^{-n} deviennent z_1^{-1} et z_2^{-1}.

a. z_1 et z_2 sont les solutions d'une équation du second degré donc $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) = az^2 - a(z_1 + z_2)z + a \cdot z_1z_2$.

Par identification, on a $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1z_2 = \dfrac{c}{a}$.

b. $z_1 + z_2 = S$; $P = z_1z_2 = z_1(S - z_2)$ donc $z_1{}^2 - Sz_1 + P = 0$. De même, $z_2{}^2 - Sz_2 + P = 0$.
Donc z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

c. $|z_1|^2 = |z_2|^2 = z_1z_2 = \dfrac{3}{2} = |z_1 + z_2| = |z_1 \cdot z_2|$;

$|z_1{}^{-1} + z_2{}^{-1}| = \left|\dfrac{z_1 + z_2}{z_1z_2}\right| = 1$.

175 **a.** Si $|a| = |b| = 1$, alors $a\bar{a} = b\bar{b} = 1$ et Z réel $\Leftrightarrow Z = \bar{Z}$.

$\left(\overline{\dfrac{a+b}{1+ab}}\right) = \dfrac{\bar{a}+\bar{b}}{1+\bar{a}\bar{b}} = \dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{1+\dfrac{1}{ab}} = \dfrac{\dfrac{b+a}{ab}}{\dfrac{1+ab}{ab}} = \dfrac{a+b}{1+ab}$ donc

$\dfrac{a+b}{1+ab}$ est réel.

b. Si $|a| = |b| = |c| = 1$, $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = 1$.
$(ab + ac + bc) = (abc\bar{c} + acb\bar{b} + bca\bar{a}) = abc(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$.
$|ab + bc + ca| = |\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}| = |a + b + c|$.

176 $|1 + z + z^2 + \ldots + z^9| = \left|\dfrac{z^{10} - 1}{z - 1}\right| = 1$ donc $|z^{10} - 1| = |z - 1|$.
$|z| = 1$ donc $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0\,;\,2\pi[$ donc
$|z - 1| = 2\sin\dfrac{\theta}{2}$, $|z^{10} - 1| = 2\sin 5\theta$ et

$\sin\frac{\theta}{2} = \sin 5\theta \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = 5\theta + 2k\pi$, ou $\frac{\theta}{2} = -5\theta + 2k\pi$ $\Leftrightarrow 9\theta = 4k\pi$ ou $11\theta = 4k\pi$. On a donc $z^9 = 1$ ou $z^{11} = 1$.

177 $z + 3\bar{z} = (2 + i\sqrt{3})|z|$.
$z = re^{i\theta} = x + iy$ alors $z = x + iy$, et
$(x + iy) + 3(x - iy) = (2 + i\sqrt{3})r \Leftrightarrow (2x = r$ et $-2y = \sqrt{3}r) \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, avec $r \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$ $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}$

178 Voir exercice 177.
$z = re^{i\theta}$ et $\cos\theta = \frac{1}{2}$ donc $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$ ou $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}$.

179 On nomme a, b, c, a', b', c' les affixes respectives des points A, B, C, A′, B′, C′. On suppose que ABC est direct.
$c' - a = i(c - a)$ et $b - a = i(b' - a)$ donc
$b' = -i(b - a) + a = a(1 + i) - ib$;
$c' = a + i(c - a) = a(1 - i) + ic$, et $a' = \frac{b + c}{2}$.
Ainsi $c' - b' = a(1 - i - 1 - i) + i(b + c) = 2i(a' - a)$ donc $B'C' = |c' - b'| = 2|a' - a| = 2AA'$ et $(\overrightarrow{AA'} ; \overrightarrow{B'C'}) = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent (AA′) et (B′C′) sont perpendiculaires.

Accompagnement personnalisé

AP1

1. a. $\omega = i\omega + 4 + 4i$, donc $\omega = 4i$.
b. $z' - 4i = iz + 4 + 4i - 4i = iz + 4 = i(z - 4i)$.
c. $|z' - 4i| = |i(z - 4i)| = |i|\cdot|4 - i| = |4 - i|$.
Donc $\arg(z' - 4i) = \arg(i) + \arg(z - 4i) = \frac{\pi}{2}$.
d. $\Omega M' = \Omega M$ et $(\vec{u} ; \overrightarrow{\Omega M'}) = \frac{\pi}{2} + (\vec{u} ; \overrightarrow{\Omega M})$ donc $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \frac{\pi}{2}$.
2. a. $a' = ia + 4 + 4i = 6 + 8i$ et
$b' = ib + 4 + 4i = -2$.
b. $m = \frac{a + a'}{2} = 5 + 3i$.
c. $n - m = -4 + 4i$ et $p - q = -4 + 4i$ donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, i.e MNPQ est un parallélogramme.

Questions complémentaires
2. MNPQ semble être un carré.
$q - m = -4 - 4i = i(-4 + 4i) = i(n - m)$ donc par module, MN = MQ et par argument, $(\overrightarrow{MN} ; \overrightarrow{MQ}) = \frac{\pi}{2}$.
MNPQ est bien un carré.

AP3

1. $x = u + v$; $u^3 + v^3 = q$ et $3uv = p$ donc $u^3 \cdot v^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3$ donc u^3 et v^3 sont solutions de $x^2 - qx = \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$.
$\Delta = q^2 - 4\left(\frac{p}{3}\right)^3$ donc si $\Delta \geqslant 0$,
$u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$; $v^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ et
$u + v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$.
2. $f(x) = x^3 - px - q$ donc $f'(x) = 3x^2 - p$ a 2 racines pour $p > 0$: $x_1 = \sqrt{\frac{p}{3}}$ et $x_2 = -\sqrt{\frac{p}{3}}$,
$f(x_1) = -\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} - q$, $f(x_2) = \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} - q$ et si P a trois racines réelles alors $f(x_1) < 0 < f(x_2)$ soit $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$.
3. Si P a une racine double, alors $f(x_1) = 0$ ou $f(x_2) = 0$ donc $\Delta = 0$ et $x = 2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$.
4. $\Delta < 0$, $z = u^3$, $z_2 = v^3$, $z_1 = u$, $z_3 = v$ et $z_4 = u + v = x$.

AP4

1. a. La courbe est une sinusoïde.
b. c est l'ordonnée maximale, on lit $c = 2$.
c. φ est tel que $\cos(x + \varphi) = 1$, on lit $\frac{\pi}{3} + \varphi = 0$ donc $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ et $2\cos(x - \frac{\pi}{3}) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$.
2. Dans l'exemplaire élève, l'énoncé a été modifié :
2. a. Montrer alors que $\mathbf{c}\cdot\mathbf{e}^{\mathbf{i}t} = a + ib$.
a. $\mathrm{Re}(a - ib)(\cos x + i\sin x) = a\cos x + b\sin x$ donc $a - ib = ce^{-it}$ convient et on a $a + ib = ce^{it}$.
Donc $c = |a + ib|$, $\cos t = \frac{a}{c}$ et $\sin t = \frac{b}{c}$.
b. $c = |1 + i\sqrt{3}| = 2$, $\cos t = \frac{1}{2}$, $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $t = \frac{\pi}{3}$.

AP5 Exemple d'un exercice possible

1. a. Vérifier que le point A d'affixe $a = \mathrm{i}$ répond à la question ($a^2 = -1$; $a^3 = -\mathrm{i}$).

b. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, trouver un autre point qui répond à la question (2i).

c. Montrer que si z est imaginaire pur, alors M répond à la question.

$z = \mathrm{i}k$; $z^2 = (\mathrm{i}k)^2$; $z^3 = (\mathrm{i}k)^3$.

$|z - z^2|^2 + |z^2 - z^3|^2 =$
$k^2(1 + k^2) + k^4(1 + k^2) = k^2(1 + k^2)^2 =$
$|z - z^3|^2$.

2. Montrer que si MM'M'' est rectangle en M', alors z est imaginaire pur.

Développer $|z - z^2|^2 + |z^2 - z^3|^2 = |z - z^3|^2 =$ $(|z|\,|z - 1|)^2(1 + |z|^2 = |z + 1|^2)$ et poser $z = x + \mathrm{i}y$.

3. MM'M'' peut-il être rectangle en M ? (oui, si $\mathrm{Re}(z) = -1$) en M'' ? (oui, si M est sur le cercle de centre $\mathrm{A}(-\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$).