

Devoir de mathématiques

N°12

Exercice 1) (à traiter sans calculatrice ni formulaire, 5 points)

Les questions sont indépendantes

1) Donner une primitive des fonctions f, g, h, k définies par :

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+6x+10}, g(x) = \frac{\cos x}{\sin^4 x}, h(x) = x^2 e^{-x^3}, k(x) = (2x-1)^6$$

2) Calculer $I = \int_0^1 x e^{-x} dx$ et $J = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

3) En remarquant que $\cos^2 t = \frac{\cos 2t + 1}{2}$, calculer $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$

Exercice 2) (bac S, 1995, 10 points)

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}, J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx, K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx$$

1) Calcul de I : soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$

- a) Calculer la dérivée de la fonction $x \rightarrow x + \sqrt{x^2 + 2}$
- b) En déduire la dérivée f' de f .
- c) Calculer I

2) Calcul de J et K

- a) Sans calculer explicitement J et K , vérifier que $J + 2I = K$.
- b) A l'aide d'une intégration par parties dans K (on écrira que $\sqrt{x^2 + 2} = 1 \times \sqrt{x^2 + 2}$) montrer que $K = \sqrt{3} - J$.
- c) En déduire les valeurs de J et K .

Exercice 3) (Bac C, 1987, 8 points)

On pose $I_0 = \int_1^e x dx$ et pour tout n de \mathbb{N}^* , $I_n = \int_1^e x (\ln x)^n dx$.

- 1) Calculer I_0 et I_1 .
- 2) A l'aide d'une intégration par parties dans I_n , prouver que pour tout n appartenant à \mathbb{N}^* , $2I_n + nI_{n-1} = e^2$. En déduire le calcul de I_2 .
- 3) Montrer sans calcul que la suite (I_n) est décroissante. En déduire, en utilisant la relation démontrée à la question 2, que pour tout n appartenant à \mathbb{N}^* , $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$.
- 4) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$