Classe de terminale S_4 **Samedi 27 mars 2004**

Devoir de mathématiques

n°14

Exercice 1) (4 points)

1) Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 xe^{2x}dx\,, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos^3 x dx\,, \qquad \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx\,, \qquad \int_1^e x^n \ln x dx\,.$$

2) On rappelle que pour tout réel x, on a $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. En déduire que pour tout x, $\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$, puis le calcul de $\int_0^{\pi} \cos^4 x dx$.

Exercice 2) (8 points)

Un supermarché commercialise des gaufrettes vendues en paquets pour lesquels :
Dans 5% des cas l'emballage n'est pas intact.
Dans 70% des emballages non intacts il y au moins une gaufrette cassée.
90% des emballages intacts ne contiennent pas de gaufrette cassée.

1) Un client achète au hasard un paquet de gaufrettes. On note I l'événement « l'emballage est intact » et C l'événement « au moins une gaufrette est cassée ».
   a) Calculer la probabilité de I.
   b) On considère les événements suivants : E « l'emballage n'est pas intact et aucune gaufrette n'est cassée » et F « l'emballage est intact et aucune gaufrette n'est cassée ».l Exprimer E et F en fonction de I, $\overline{\mathrm{I}}$, et $\overline{\mathrm{C}}$. Calculer les probabilités de E et de F. En déduire la probabilité de $\overline{\mathrm{C}}$, puis celle de C.
   c) Le paquet ne contient pas de gaufrette cassée. Calculer la probabilité que l'emballage ait été intact.
2) Lors d'une vente promotionnelle, les paquets sont vendus par lots de 5. Un client achète au hasard un tel lot. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune gaufrette cassée ? Que le lot contienne au moins un emballage détérioré ?

Exercice 3 (8 points)

On définit la suite d'intégrales :

$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$, $I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx, \ldots, I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx$ (n désigne un entier naturel).

1) Calculer I_1 et $I_0 + I_1$. En déduire I_0. Pour tout entier n, calculer $I_n + I_{n+1}$.
2) Montrer sans calcul que la suite (I_n) est croissante.
3) Prouver que pour tout x de $[0 ; 1]$: $\frac{e^{nx}}{e+1} \le \frac{e^{nx}}{e^x+1} \le \frac{e^{nx}}{2}$. En déduire un encadrement de I_n.
4) A partir de cet encadrement, déterminer la limite de I_n et celle de $\frac{I_n}{e^n}$.