Classe de terminale S_5

Corrigé du DS n°12

Exercice 1)

1) $f(x)=\frac{x+3}{x^2+6x+10}$, $f=\frac{1}{2}\frac{u'}{u}$ avec $u(x)=x^2+6x+10$, donc f admet pour primitive F définie par $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x+10\right|=\frac{1}{2}\ln(x^2+6x+10)$ (le trinôme est toujours positif).

$g(x)=\frac{\cos x}{\sin^4 x}$, $g=\frac{u'}{u^4}$ avec $u(x)=\sin x$, g admet pour primitive $G:x\to\frac{-1}{3\sin^3 x}$.

$h(x)=x^2e^{-x^3}$, $h=\frac{-1}{3}u'e^u$ avec $u(x)=-x^3$, h admet pour primitive $H:x\to\frac{-1}{3}e^{-x^3}$.

$k(x)=(2x-1)^6$ admet pour primitive $K:x\to\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}(2x-1)^7=\frac{1}{14}(2x-1)^7$.

(0,5 point pour chaque, 0,25 pour une erreur)

2) $I=\int_0^1 xe^{-x}dx$ s'intègre par parties : $u'(x)=e^{-x}, u(x)=-e^{-x}, v(x)=x, v'(x)=1$. Il vient $I=\left[-xe^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 -e^{-x}dx=-e^{-1}-\left[e^{-x}\right]_0^1=-e^{-1}-(e^{-1}-1)=1-2e^{-1}$. **(1 point)**

$J=\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$ s'intègre en remarquant que $\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\ln x$ est de la forme *uu'*, qui admet pour primitive $\frac{1}{2}u^2$. On a donc $J=\left[\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_1^e=\frac{1}{2}\ln^2 e-\frac{1}{2}\ln^2 1=\frac{1}{2}$. **(1 point)**

3) $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin\pi-(0+\frac{1}{4}\sin 0)=\frac{\pi}{4}$ **(1 point)**

Exercice 2)

$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}, J=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx, K=\int_0^1\sqrt{x^2+2}dx$

1) Calcul de I.

a) La dérivée de $x\to x+\sqrt{x^2+2}$ est $x\to 1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}=\frac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}}$. **(1,25 point)**

b) On a donc $f'(x)=\frac{\frac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}}=\frac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}}\times\frac{1}{x+\sqrt{x^2+2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$. **(1,25 point)**

c) Par conséquent, *f* est une primitive de la fonction $x\to\sqrt{x^2+2}$ et on a

$K=\left[\ln(x+\sqrt{x^2+2}\right]_0^1=\ln(1+\sqrt{3})-\ln\sqrt{2}$ **(1,5 point)**

2) Calcul de J et K.

a) $J+2I=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx+2\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx=\int_0^1\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}dx=\int_0^1\sqrt{x^2+2}dx=K$. **(1 point)**

b) Dans $K=\int_0^1\sqrt{x^2+2}dx$, faisons une intégration par parties avec $\sqrt{x^2+2}=1\times\sqrt{x^2+2}$. Posons $u'(x)=1, u(x)=x, v(x)=\sqrt{x^2+2}, v'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. On obtient

$$K=\left[x\sqrt{x^2+2}\right]_0^1-\int_0^1 x\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx=\sqrt{3}-\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx=\sqrt{3}-J$$. **(2,5 points)**

c) Dans $J + 2I = K$, substituons K par sa valeur pour obtenir $J+2I=\sqrt{3}-J$ donc $2J=\sqrt{3}-2I$ et $J=\frac{\sqrt{3}}{2}-I=\frac{\sqrt{3}}{2}-(\ln(1+\sqrt{3})-\ln\sqrt{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln(1+\sqrt{3})+\ln\sqrt{2}$. Reste à obtenir K : $K=\sqrt{3}-J=\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln(1+\sqrt{3})-\ln\sqrt{2}$. **(2,5 points)**

Exercice 3

On pose $I_0=\int_1^e xdx$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_n=\int_1^e x(\ln x)^n dx$.

1) $I_0=\int_1^e xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e=\frac{e^2-1}{2}$ **(0,5 point)** .

$I_1=\int_1^e x\ln xdx$ s'intègre par parties en posant $u'(x)=x, u(x)=\frac{x^2}{2}, v(x)=\ln x, v'(x)=\frac{1}{x}$. Il vient

$$I_1=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2x}dx=\frac{e^2}{2}-\int_1^e\frac{x}{2}dx=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2-1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$$ **(1,5 point)**

2) Faisons une intégration par parties dans I_n : $u'(x)=x, u(x)=\frac{x^2}{2}, v(x)=(\ln x)^n, v'(x)=n\frac{1}{x}(\ln x)^{n-1}$.

$I_n=\left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^n\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}n\frac{1}{x}(\ln x)^{n-1}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{n}{2}\int_1^e x(\ln x)^{n-1}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{n}{2}I_{n-1}$, soit $2I_n=e^2-nI_{n-1}$ et $2I_n+nI_{n-1}=e^2$. **(1 point)**. Pour $n = 2$, $2I_2+2I_1=e^2$, donc $I_2=\frac{e^2}{2}-I_1=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2+1}{4}=\frac{e^2-1}{4}$. **(1 point)**

3) $I_{n+1}-I_n=\int_1^e x(\ln x)^{n+1}dx-\int_1^e x(\ln x)^n dx=\int_1^e x(\ln x)^n(\ln x-1)dx$. Sur l'intervalle [1 ; e] x et $\ln x$ sont positifs, mais ln x – 1 est négatif. La fonction $x\to x(\ln x)^n(\ln x-1)$ est donc négative sur [1 ; e]. Comme 1 < e, son intégrale est négative. $I_{n+1}-I_n$ est toujours négatif, et la suite (I_n) est donc décroissante **(1 point)**

On peut donc en déduire que pour tout n, $2I_n+nI_n\le 2I_n+nI_{n-1}$, ce qui, compte tenu de la relation du 2), peut s'écrire $(n+2)I_n\le e^2$ et $I_n\le\frac{e^2}{n+2}$ **(1 point)**. De plus, on a aussi pour tout n $2I_n+(n+1)I_n\ge 2I_{n+1}+(n+1)I_n$, ce qui s'écrit $(n+3)I_n\ge e^2$ (on utilise l'égalité du 2) pour n + 1au lieu de n, et donc $I_n\ge\frac{e^2}{n+3}$ **(1 point).**

4) On a donc pour tout n $\frac{e^2}{n+3}\le I_n\le\frac{e^2}{n+2}$, et comme e^2 est une constante, $\frac{e^2}{n+3}$ et $\frac{e^2}{n+2}$ tendent vers 0 quand n tend vers +∞. D'après le théorème des gendarmes, I_n tend vers 0. En outre, $\frac{ne^2}{n+3}\le nI_n\le\frac{ne^2}{n+2}\Leftrightarrow\frac{e^2}{1+\frac{3}{n}}\le nI_n\le\frac{e^2}{1+\frac{2}{n}}$ pour tout n non nul. Comme $\frac{e^2}{1+\frac{3}{n}}$ et $\frac{e^2}{1+\frac{2}{n}}$ ont même limite e^2, d'après le théorème des gendarmes nI_n a pour limite e^2 **(0,5 point chaque)**