Classe de terminale S_4

Corrigé du DS n°14

Exercice 1 : calcul d'intégrales

$\int_0^1 xe^{2x}dx$: par parties. Posons $u(x)=x, v'(x)=e^{2x}$ donc $u'(x)=1, v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$.

$$\int_0^1 xe^{2x}dx=\left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^2-\left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}(e^2-1)=\frac{e^2+1}{4}.$$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cos^3 xdx$: c'est une primitive de la forme $-u'u^n$, avec $u(x)=\cos x$, $u'(x)=-\sin x$ donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cos^3 xdx=\left[-\frac{1}{4}\cos^4 x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^4}-1\right)=\frac{15}{64}.$$

$\int_1^2\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$: c'est une primitive de la forme $2u'e^u$ avec $u(x)=\sqrt{x}, u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc :

$$\int_1^2\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\left[2e^{\sqrt{x}}\right]_1^2=2\left(e^{\sqrt{2}}-e\right)$$

$\int_1^e x^n\ln xdx$: par parties avec $u(x)=\ln x, v'(x)=x^n$ donc $u'(x)=\frac{1}{x}, v(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$.

$$\int_1^e x^n\ln xdx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{n+1}\times\frac{1}{x}\times x^{n+1}dx=\frac{e^{n+1}}{n+1}-\int_1^e\frac{x^n}{n+1}dx=\frac{e^{n+1}}{n+1}-\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^e$$

$$\int_1^e x^n\ln xdx=\frac{e^{n+1}}{n+1}-\frac{e^{n+1}-1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)e^{n+1}-e^{n+1}+1}{(n+1)^2}=\frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}$$

Pour tout réel x, $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ donc $\cos^4 x=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}$. On a de plus $\cos^2 2x=\frac{1+\cos 2\times 2x}{2}=\frac{1+\cos 4x}{2}$ soit $\cos^4 x=\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}$.

On peut en déduire la calcul de $\int_0^{\pi}\cos^4 xdx$:

$$\int_0^{\pi}\cos^4 xdx=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}\right)dx=\left[\frac{1}{32}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{8}x\right]_0^{\pi}=\frac{3\pi}{8}$$

Exercice 2 : probabilités.

La probabilité que l'emballage soit détérioré est de 5% = 0,05 donc celle qu'il soit intact est : $p(I)$ = 1 – 0,05 = 0,95.

L'événement E : « l 'emballage n'est pas intact et aucune gaufrette n'est cassée » est $E=\overline{I}\cap\overline{C}$. De même, $F=I\cap\overline{C}$.

L'énoncé donne les probabilités conditionnelles $p_I(\overline{C})=90\%=0,9$ et $p_{\overline{I}}(C)=70\%=0,7$. On a donc $p(E)=p(\overline{I}\cap\overline{C})=p_{\overline{I}}(\overline{C})p(\overline{I})=\left(1-p_{\overline{I}}(C)\right)p(\overline{I})=0,3\times 0,05=0,015$, et de même $p(F)=p(I\cap\overline{C})=p_I(\overline{C})\times p(I)=0,9\times 0,95=0,855$.

I et $\overline{I}$ forment un système complet d'événements, donc d'après la loi des probabilités totales, on a $p(\overline{C}) = p(E) + p(F) = 0,855 + 0,015 = 0,87$ et $p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 0,13$.

Le paquet ne contient pas de gaufrette cassée. La probabilité que l'emballage ait été intact est $p_{\overline{C}}(I) = \frac{p(\overline{C} \cap I)}{p(\overline{C})} = \frac{p(F)}{p(\overline{C})} = \frac{0,855}{0,87} = \frac{57}{58}$.

Dans un lot de 5 paquets, en supposant que l'état de chaque paquet soit indépendant de celui des autres, pour qu'aucune gaufrette ne soit cassée il faut que le premier paquet ne contienne pas de gaufrette cassée (probabilité 0,87), puis, cela étant acquis, que le second non plus (donc pour les deux paquets $0,87^2$), et ainsi de suite pour les cinq paquets. La probabilité que toutes les gaufrettes du lot soient intactes est donc de $0,87^5$. De même , pour que les 5 emballages soient intacts, la probabilité est de $0,95^5$. La probabilité qu'au moins un emballage soit détérioré est donc de $1 - 0,95^5$.

Exercice 3 : suite d'intégrales.

On définit $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}, I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx, \dots I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$.

$I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$, une primitive de la forme $\frac{u'}{u}$, donc $I_1 = \left[\ln(1+e^x)\right]_0^1 = \ln(1+e) - \ln 2$.

$I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} + \int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^x} = \int_0^1 \frac{1+e^x}{1+e^x} dx = \int_0^1 1dx = 1$. On peut en déduire que :

$I_0 = 1 - I_1 = 1 + \ln 2 - \ln(1+e)$.

$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{nx} + e^{(n+1)x}}{1+e^x} dx = \int_0^1 \frac{e^{nx}(1+e^x)}{1+e^x} dx = \int_0^1 e^{nx} dx = \left[\frac{1}{n} e^{nx}\right]_0^1 = \frac{e^n - 1}{n}$.

Pour tout x de [0 ; 1], pour tout entier n, $nx \leqslant (n + 1)x$ donc $e^{nx} \le e^{(n+1)x}$ (l'exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, et $\frac{e^{nx}}{1+e^x} \le \frac{e^{(n+1)x}}{1+e^x}$ car $1+e^x$ est toujours positif. Par comparaison d'intégrales (0 < 1), on a donc $\int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx \le \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x}}{1+e^x} dx$ pour tout entier n, le suite (I_n) est donc croissante.

Pour tout x de [0 ; 1], on a $0 \le x \le 1$ donc $e^0 \le e^x \le e^1$ (l'exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$), donc $2 \le 1+e^x \le 1+e$ et $\frac{1}{2} \ge \frac{1}{1+e^x} \ge \frac{1}{1+e}$ (la fonction inverse est décroissante sur]0 ;+∞[). En multipliant cette inégalité par le réel positif e^{nx}, on obtient, pour tout x de [0 ; 1] et pour tout entier n, que $\frac{e^{nx}}{1+e} \le \frac{e^{nx}}{1+e^x} \le \frac{e^{nx}}{2}$. Par comparaison d'intégrales, on a donc pour tout entier n : $\int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e} dx \le \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx \le \int_0^1 \frac{e^{nx}}{2} dx \Leftrightarrow \frac{1}{1+e} \int_0^1 e^{nx} dx \le I_n \le \frac{1}{2} \int_0^1 e^{nx} dx$. Par linéarité. De plus, $\int_0^1 e^{nx} dx = \left[\frac{1}{n} e^{nx}\right]_0^1 = \frac{e^n - 1}{n}$. On a pour tout entier non nul n : $\frac{e^n - 1}{n(1+e)} \le I_n \le \frac{e^n - 1}{2n}$.

Par croissance comparées de l'exponentielle et des polynômes, $\lim_{n \to +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$ donc I_n tend vers +∞ par comparaison. De plus, on a $\frac{e^n - 1}{e^n n(1+e)} \le \frac{I_n}{e^n} \le \frac{e^n - 1}{2ne^n}$ soit $\frac{1 - e^{-n}}{n(1+e)} \le \frac{I_n}{e^n} \le \frac{1 - e^{-n}}{2n}$. Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - e^{-n}}{n(1+e)} = 0$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - e^{-n}}{2n} = 0$, donc d'après le théorème des gendrames, $\frac{I_n}{e^n}$ a pour limite 0.