Classe de terminale S_5 ***Vendredi 27 septembre 2002***

Devoir de mathématiques n°2

Exercice 1) (3 points)

1) Pour tout entier naturel *n*, on note $F_n = 2^{\left(2^n\right)} + 1$. Calculer F_0, F_1, F_2, F_3.
2) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, on a $F_0 \times F_1 \times F_2 ... \times F_n = F_{n+1} - 2$.
3) Montrer que la suite $\left(F_n\right)$ est croissante et non majorée. Quelle est sa limite ?

Exercice 2) (6 points)

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, on a $3^n \geq n^2(n-1)$.
2) On définit, pour $n \geqslant 1$, la suite (u_n) par $u_n = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + ... + \frac{n}{3^n}$.
   a) Exprimer u_n à l'aide du symbole Σ. Quel est le sens de variation de (u_n) ?
   b) Montrer par récurrence que pour tout entier $k \geqslant 1$, $k - \left(\frac{3}{2}\right)^k \leq 0$. En déduire que, pour tout $k \geqslant 1$, $\frac{k}{3^k} \leq \frac{1}{2^k}$ puis un majorant de u_n. Que peut-on en conclure pour (u_n) ?
3) On définit pour $n \geqslant 1$ la suite (v_n) par $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. En utilisant la question 1), montrer que (v_n) est décroissante. Quelle est la limite de $(v_n - u_n)$? Que peut-on en conclure pour (v_n) ?

Exercice 3) (7 points)

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2000$; $u_{n+1} = \frac{3}{4} u_n + 200$.

1) Dans un repère de votre choix, représenter les droites d'équation respectives $y = x$ et $y = \frac{3}{4}x + 200$, puis les premiers termes de la suite (u_n).
2) On pose pour tout n $v_n = u_n - 800$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n* et la limite de (u_n). Au bout de combien de temps a-t-on $u_n < 810$?
3) Gaston L, garçon de bureau aux éditions Dupuis, se plaint à sa dulcinée : « Voyez-vous, m'oiselle Jeanne, tous les jours je sais traiter le quart de mon courrier en retard, mais il m'arrive 200 lettres de plus chaque matin .» « Monsieur Gaston, vous arriverez bien à trouver une solution, vous êtes si intelligent… » Oui, mais quelle solution, sachant qu'hier soir il y avait 2000 lettres sur le bureau de notre héros ?
4) La question a) est indépendante de ce qui précède
   a) Si (x_n) est une suite croissante, on définit (y_n) par $y_n = \frac{x_0 + x_1 ... + x_n}{n+1}$. Montrer que (y_n) est croissante et que pour tout *n* on a $y_n \leq x_n$. Que peut-on dire pour une suite (x_n) décroissante (on ne justifiera pas ses affirmations).
   b) On appelle M_n la quantité de lettres qu'il y eu en moyenne sur le bureau de Gaston pendant les *n* premiers jours (en comptant comme jour 0 le soir où il y avait 2000 lettres). Exprimer M_n en fonction de *n*. Quel est le sens de variation de $\left(M_n\right)$. La suite $\left(M_n\right)$ est-elle convergente ?

Exercice 4 (3 points)

Monsieur De Mesmaeker, grand patron bruxellois, propose à ses nouveaux employés les deux contrats suivants : dans tous les cas un salaire initial de 1500€ pour le premier mois, augmenté de 5€ chaque mois (contrat 1), ou augmenté de 0,3% tous les mois (contrat 2).

1) Soient u_n et v_n les salaires respectifs pour chaque contrat le $n^{\text{ième}}$ mois. Exprimer u_n et v_n en fonction de *n*.
2) Quel salaire gagnerait-on pour chaque contrat après un an passé dans l'entreprise ?
3) Comparer la totalité des sommes gagnée par quelqu'un qui resterait pendant 40 ans dans l'entreprise.