Classe de Terminale S_5

Correction du Devoir n°2

Exercice 1)

Pour tout entier *n*, on appelle $F_n = 2^{(2^n)} + 1$. Ce nombre est appelé nombre de Fermat, du nom d'un mathématicien Français. Fermat (1601–1665) était contemporain de Descartes (1596–1650) et Pascal (1623–1662), il est l'inventeur du raisonnement par récurrence, sous la forme de la « descente infinie » : pour prouver qu'une propriété est fausse pour tout entier, il prouve que si elle est vraie pour *n*, alors elle est vraie pour un certain *p* strictement inférieur à *n*. Comme il ne peut y avoir de suite strictement décroissante d'entiers positifs, la propriété ne peut jamais être vraie. Il est aussi l'auteur d'un théorème arithmétique, le « petit théorème de Fermat », qui dit que si *p* est premier, alors pour tout entier *n*, $n^p - n$ est un multiple de *p*. Ce théorème se prouve par récurrence, et on le fera plus tard si vous êtes sages (peut-être devrais-je plutôt menacer de le faire plus tard si vous n'êtes pas sages) Fermat a aussi énoncé le « grand théorème de Fermat » qui dit que l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution en nombres entiers non nuls si $n > 2$. Il a noté cet énoncé dans la marge du livre « L'arithmétique » de Diophante, en écrivant « La somme de deux cubes ne peut jamais être un cube, ni la somme de deux puissances quatrièmes une puissance quatrième, et ainsi de suite. J'ai découvert une preuve merveilleuse de ce théorème, mais malheureusement je n'ai pas la place de l'écrire dans cette marge. » Ce théorème a été démontré par le mathématicien britannique Andrew Wiles en 1993, après que des monstres tels que Euler aient obtenu des résultats partiels (Euler a prouvé le théorème pour $n = 3$) Concernant les nombres de Fermat, après avoir remarqué que $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65537$ sont premiers, Fermat a écrit qu'ils étaient tous premiers, ce que Euler a réfuté en démontrant que $F_5 = 2^{32} + 1 = 641 \times 6700417$ (cette démonstration a été faite en 1732, et bien sûr sans utiliser de calculatrice).

Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $F_0 \times F_1 \times ... \times F_n = F_{n+1} - 2$

Initialisation pour $n = 1$: $F_0 \times F_1 = 3 \times 5 = 15$ et $F_2 - 2 = 17 - 2 = 15$, la propriété est vraie.

Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$, et intéressons nous alors au produit $F_0 \times F_1 \times ... \times F_{n+1} = F_0 \times F_1 \times ... \times F_n \times F_{n+1}$. Nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence, et nous obtenons $F_0 \times F_1 \times ... \times F_{n+1} = (F_{n+1} - 2) \times F_{n+1}$, c'est à dire, en remplaçant par sa valeur, $F_0 \times F_1 \times ... \times F_{n+1} = (2^{(2^{n+1})} + 1 - 2) \times (2^{(2^{n+1})} + 1) = (2^{(2^{n+1})} - 1) \times (2^{(2^{n+1})} + 1) = \left(2^{(2^{n+1})}\right)^2 - 1$. Il ne reste plus qu'à remarquer que $\left(2^{(2^{n+1})}\right)^2 - 1 = 2^{2 \times (2^{n+1})} - 1 = 2^{(2^{n+2})} - 1 = F_{n+2} - 2$ pour avoir le résultat. Notre proposition, vraie pour $n = 1$ et héréditaire, est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Quel est le sens de variation de (F_n) ? La suite géométrique (2^k) est croissante et tend vers l'infini. Il en résulte que pour tout entier *n*, $2^{n+1} > 2^n$, donc aussi $2^{(2^{n+1})} > 2^{(2^n)}$ et $F_{n+1} > F_n$. La suite (F_n) est donc croissante, et comme (2^k) n'est pas bornée, elle ne l'est pas non plus. On peut en conclure qu'elle tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$ on a $3^n \geq n^2(n-1)$.

Initialisation : $3^0 = 1$ et $0^2(0-1) = 0$, on a bien $1 \geq 0$.

Hérédité : supposons vrai que pour un certain *n* on ait $3^n \geq n^2(n-1)$. Alors $3^{n+1} = 3 \times 3^n$ est supérieur, d'après l'hypothèse de récurrence, à $3n^2(n-1)$. Pour prouver la propriété au rang $n + 1$, il suffit donc de prouver que $3n^2(n-1) \geq (n+1)^2 n$, ce qui, pour $n > 0$, est équivalent à :

$3n(n-1) \geq (n+1)^2 \Leftrightarrow 2n^2 - 5n - 1 \geq 0$. Ce trinôme est positif pour $n \geq \frac{5+\sqrt{33}}{4} \simeq 2,7$, donc à partir de n = 3. Dans la mesure où nous n'avons l'hérédité que pour $n \geqslant 3$, il faut vérifier la propriété pour n = 1, n = 2 et n = 3, ce qui est immédiat. Elle est donc prouvée par récurrence.
On définit maintenant la suite (u_n) par $u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + ... + \frac{n}{3^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k}$. On peut donc écrire $u_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + ... + \frac{n}{3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}} = u_n + \frac{n+1}{3^{n+1}}$, donc la suite (u_n) est croissante.

Montrons par récurrence que, pour tout entier $k \geqslant 1$, $k - \left(\frac{3}{2}\right)^k \leq 0$.

Initialisation : pour k = 1, on a bien $1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} < 0$.

Hérédité : supposons vrai que pour un certain k on ait $k - \left(\frac{3}{2}\right)^k \leq 0$.

Alors $k + 1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} = k + 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k = \frac{3}{2}\left(\frac{2(k+1)}{3} - \left(\frac{3}{2}\right)^k\right)$. Nous pouvons utiliser l'hypothèse de récurrence à condition que $\frac{2(k+1)}{3}$ soit inférieur à k, ce qui est vrai pour $k \geqslant 2$. On a donc, si $k \geqslant 2$, $\frac{3}{2}\left(\frac{2(k+1)}{3} - \left(\frac{3}{2}\right)^k\right) \leq \frac{3}{2}\left(k - \left(\frac{3}{2}\right)^k\right)$ qui est donc bien négatif d'après l'hypothèse de récurrence. Il faut donc vérifier la propriété pour k = 2, et $2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2 - 2,25 < 0$. La propriété est donc bien prouvée par récurrence. On a donc pour tout $k \geqslant 1$ $k \leq \frac{3^k}{2^k}$, donc $\frac{k}{3^k} \leq \frac{1}{2^k}$. On en déduit donc que pour tout n, on a $u_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ (c'est la somme des termes d'une suite géométrique), et donc (u_n) est majorée par 1.
La suite (u_n), croissante et majorée, est donc convergente.

On définit maintenant (v_n) par $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Calculons donc $v_{n+1} - v_n$:

$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = u_{n+1} - u_n - \frac{1}{n(n+1)}$. Il faut maintenant se rappeler que $u_{n+1} - u_n$ est égal à $\frac{n+1}{3^{n+1}}$, et donc $v_{n+1} - v_n = \frac{n+1}{3^{n+1}} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)^2 n - 3^{n+1}}{n(n+1)3^{n+1}}$. Nous savons d'après la première question que ce nombre est négatif, donc la suite (v_n) est décroissante. De plus, $v_n - u_n = \frac{1}{n}$ a pour limite 0, les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes, elles ont la même limite.

Exercice 3

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2000, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 200$ et on pose $v_n = u_n - 800$.

$v_{n+1} = u_{n+1} - 800 = \frac{3}{4}u_n + 200 - 800 = \frac{3}{4}u_n - 600 = \frac{3}{4}(u_n - 800) = \frac{3}{4}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{3}{4}$, et on a pour tout n $v_n = v_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1200 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$, et donc $u_n = 800 + 1200 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Comme $0 < \frac{3}{4} < 1$, la suite (v_n) tend vers 0, et la suite (u_n) vers 800.

On aura $u_n < 810$ si et ssi $1200 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n < 10 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n < \frac{1}{120}$. On trouve à la calculatrice que c'est réalisé pour $n \geqslant 17$.

Si on appelle u_n la quantité de courrier en retard qu'il reste à Gaston au bout de *n* jours, on s'aperçoit que $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 200$, puisqu'il a traité le quart de son retard, mais qu'il a récupéré 200 lettres de plus, c'est à dire que nous sommes dans la situation étudiée plus haut. ainsi, la quantité de courrier en retard sur son bureau sera toujours supérieure à 800 lettres, et il aura moins de 810 lettres au bout de 17 jours. Il n'y a donc pas de solution

Si (x_n) est une suite croissante, on définit $y_n = \frac{x_0 + x_1 + ... + x_n}{n+1}$, la moyenne des premiers termes de (x_n).

y_{n+1} est la moyenne avec un terme de plus, comme la suite (x_n) est croissante, le terme que l'on a ajouté est supérieur aux autres, et la moyenne a donc augmenté. On en conclut que la suite (y_n) est croissante. En outre, $x_n - y_n = x_n - \frac{x_0 + x_1 + ... + x_n}{n+1}$, et en mettant au même dénominateur on obtient $x_n - y_n = \frac{nx_n - (x_0 + x_1 + ... + x_{n-1})}{n+1}$. Comme x_n est supérieur à chacun des nombres $x_0, x_1 ... x_{n-1}$, qu'il y a *n* nombres et qu'on a nx_n, $x_n - y_n$ est positif. On aurait aussi pu dire que la moyenne y_n est toujours inférieure au plus grand terme x_n. Si la suite (x_n) était décroissante, la suite (y_n) le serait aussi, et on aurait $y_n \geq x_n$.

La quantité de lettres qu'il y a eu en moyenne sur le bureau de Gaston au cours des *n* premiers jours est

$$M_n = \frac{u_0 + u_1 + .. + u_n}{n+1} = \frac{800 + v_0 + 800 + v_1 + ... + 800 + v_n}{n+1} = 800 + \frac{1200}{n+1}\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}}$$

car la suite (v_n) est une suite géométrique. D'après la question précédents, comme (u_n) est décroissante, la suite (M_n) est décroissante, et elle tend vers 800 car $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ a pour limite 0.

Exercice 4

On a $u_1 = 1500, u_{n+1} = u_n + 5$ donc $u_n = 1500 + 5(n-1) = 1495 + 5n$.

De même, $v_1 = 1500, v_{n+1} = 1{,}003 v_n$ donc $v_n = 1500 \times 1{,}003^{n-1}$.

Au bout d'un an, on a passé 12 mois dans la société, on gagne donc un salaire de $1495 + 60 = 1555€$ avec le premier contrat, et de $1500 \times 1{,}003^{11} \simeq 1550{,}25€$ pour le second contrat.

Au bout de 40 ans, soit 480 mois, on a gagné $\frac{u_1 + u_{480}}{2} \times 480 = \frac{1500 + 1500 + 5 \times 479}{2} \times 480 = 1294800€$ avec la premier contrat, et $1500 \times \frac{1{,}003^{480} - 1}{1{,}003 - 1} \simeq 1605803{,}55€$