

## Devoir de mathématiques

n<sup>2</sup>**Exercice 1) (3 points)**

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant sa réponse :

- Une suite convergente est bornée.
- Une suite bornée est convergente.
- Une suite qui tend vers  $+\infty$  ne peut pas être majorée.
- Si  $u_n - v_n$  tend vers 0 alors  $u_n$  et  $v_n$  ont la même limite.
- Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  tendent vers  $+\infty$  alors  $u_n - v_n$  tend vers 0.
- Si pour tout  $n \geq 10$  :  $|u_n - 3| \leq \frac{1}{n^2}$  alors  $(u_n)$  converge vers 3.

**Exercice 2) (6 points)**

Montrer par récurrence les propriétés suivantes :

- Pour tout entier naturel  $n$ ,  $2^n \geq n$
- Pour tout entier naturel  $n$ ,  $2^{2n+1} + 3^{2n+1}$  est un multiple de 5
- Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$  (on exprimera la somme à l'aide du symbole  $\Sigma$ )

**Exercice 3) (d'après bac S, avril 2003, Inde, 8 points)**On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par  $u_0 = a$ , et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$ ,  $a$  étant un réel donné avec  $0 < a < 1$ .

- On suppose dans cette question que  $a = \frac{1}{8}$ 
  - Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
  - Dans un repère orthonormal d'unité graphique 8 cm, tracer sur l'intervalle  $[0 ; 2]$  la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x$  et la courbe  $\mathcal{P}$  représentative de la fonction  $f : x \rightarrow x(2 - x)$ .
  - Utiliser  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{P}$  pour construire sur l'axe des abscisses les points  $A_1, A_2, A_3$  d'abscisses respectives  $u_1, u_2, u_3$ .
- On suppose à partir de cette question que  $a$  est un réel quelconque de l'intervalle  $]0 ; 1[$ .
  - Montrer par récurrence que pour tout entier  $n : 0 < u_n < 1$ .
  - Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
- On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout  $n$  par  $v_n = 1 - u_n$ .
  - Exprimer pour tout entier  $n$ ,  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ .
  - En déduire l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$  (on pourra justifier par récurrence).
  - Quelle est la limite de la suite  $(u_n)$  ?

**Exercice 4) (3 points)**Le Capitaine Haddock a décidé de rationaliser sa consommation de Whisky. Il a un stock de 200 bouteilles, et chaque mois il consomme le quart de son stock, et rachète 10 bouteilles. On appelle  $u_n$  le nombre de bouteilles en stock au bout de  $n$  mois (ainsi  $u_0 = 200$ )

- Montrer que, pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 10$ . Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
- On pose pour tout entier  $n : v_n = u_n - 40$ . Quelle est la nature de la suite  $(v_n)$  ?
- Quelle sera, à terme, la consommation mensuelle du Capitaine ? Au bout de combien de mois sera-t-elle inférieure à 12 bouteilles ?