Classe de Terminale S_4

Corrigé du devoir n°2

Exercice 1)

a) Une suite convergente est bornée : **Vrai**, car si elle converge vers l, tous les termes de la suite à partir d'un certain rang sont (par exemple) dans $]l-1\,;\,l+1[$. Les premiers termes sont en nombre fini, donc on peut aussi les borner. **(0,5 point, +0,25 si la démonstration est complète)**

b) Une suite bornée est convergente. **Faux**, par exemple la suite $(-1)^n$ est bornée et n'a pas de limite. **(0,5 point)**

c) Une suite qui tend vers $+\infty$ ne peut pas être majorée. **Vrai**, car tous les termes de la suite à partir d'un certain rang dépassent tout réel que k'on pourrait fixer (il suffirait qu'un terme le dépasse). **(0,5 point)**

d) Si $u_n - v_n$ tend vers 0 alors u_n et v_n ont la même limite. **Faux**, elles n'ont pas forcément de limite **(0,5 point)**

e) Si (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$ alors $u_n - v_n$ tend vers 0. **Faux**, par exemple $u_n = n$ et $v_n = 2n$ **(0,5 point)**

f) Si pour tout $n \geqslant 10$: $|u_n - 3| \leq \dfrac{1}{n^2}$ alors (u_n) converge vers 3. **Vrai**, c'est le théorème des gendarmes : on a pour $n \geqslant 10$: $3 - \dfrac{1}{n^2} \leq u_n \leq 3 + \dfrac{1}{n^2}$ **(0,5 point)**

Exercice 2

a) Montrons par récurrence que pour tout entier n, $2^n \geq n$:

Initialisation : pour $n = 0$, $2^0 = 1 \geqslant 0$.

Hérédité : supposons la propriété $2^n \geq n$ vraie pour un certain entier n. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n$. Il reste à prouver que $2n \geq n+1$, ce qui est vrai si $n = 1$. La propriété est donc héréditaire, mais seukement à partir de $n = 1$. Il faut donc aussi la vérifier pour $n = 1$, ce qui est immédiat. La propriété $2^n \geq n$, vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, et héréditaire à partir du rang 1, est vraie pour tout entier naturel n. **(2 points)**

b) Montrons par récurrence que $2^{2n+1} + 3^{2n+1}$ est un multiple de 5.

Initialisation : pour $n = 0$, $2^1 + 3^1 = 5$ est bien un multiple de 5.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier n, $2^{2n+1} + 3^{2n+1} = 5k, k \in \mathbb{N}$. On a alors $2^{2(n+1)+1} + 3^{2(n+1)+1} = 4 \times 2^{2n+1} + 9 \times 3^{2n+1}$. Il faut maintenant penser à remplacer 9 par 4 + 5 pour pouvoir appliquer l'hypothése de récurrence :

$$\begin{aligned} 2^{2(n+1)+1} + 3^{2(n+1)+1} &= 4 \times 2^{2n+1} + (4+5) \times 3^{2n+1} = 4(2^{2n+1} + 3^{2n+1}) + 5 \times 3^{2n+1} \\ &= 4 \times 5k + 5 \times 3^{2n+1} = 5(4k + 3^{2n+1}) \end{aligned}$$

Et comme $4k + 3^{2n+1}$ est bien un entier, $2^{2(n+1)+1} + 3^{2(n+1)+1}$ est un multiple de 5, et la propriété est héréditaire. Etant vraie pour 0, elle est vraie pour tout entier naturel. **(2 points)**

c) Montrons par récurrence que $\dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Expression de la somme : $\dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

Initialisation pour $n = 1$: $\dfrac{1}{1 \times 2} = 1 - \dfrac{1}{2}$ est vrai.

Hérédité : supposons que, pour un certain $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{n+2}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

La propriété $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$ est bien héréditaire. Etant vraie pour $n = 1$, elle est vraie pour tout entier. **(2 points)**

Remarque : il existe une preuve directe de ce résultat, en remarquant que $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. On remplace dans la somme :

$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ et on s'aperçoit que tous les termes s'annulent sauf les deux extrêmes. Mon admiration la plus grande pour ceux qui y ont pensé**, et 0,5 point de bonus.**

Exercice 3)

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = a$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n(2-u_n)$, a étant un réel donné avec $0 < a < 1$.

1) Dans cette question, $a=\frac{1}{8}$.

   a) $u_1=\frac{1}{8}\left(2-\frac{1}{8}\right)=\frac{15}{64}, u_2=\frac{15}{64}\left(2-\frac{15}{64}\right)=\frac{1695}{4096}$ **(0,5 point)**

   b+c) Courbe + escalier **(1,5 point)**

2) a est maintenant quelconque.

   a) Prouvons par récurrence que pour tout n, $0 < u_n < 1$
   $u_0 = a$ appartient à $]0 ; 1[$ par hypothèse.
   Si pour un certain entier n, $0 < u_n < 1$, alors, comme la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$, on a $f(0)< f(u_n)< f(1)$, ce qui s'écrit $0 < u_{n+1} < 1$. La propriété $0 < u_n < 1$ est donc héréditaire, elle est vraie pour tout entier n. **(1,5 point)**

   b) Pour tout entier n, $u_{n+1}-u_n=u_n(2-u_n)-u_n=u_n(1-u_n)$. On vient de prouver que pour tout n : $0 < u_n < 1$, donc u_n et $1 - u_n$ sont positifs et $u_{n+1} - u_n$ est positif pour tout n. La suite (u_n) est bien croissante. **(1,5 point)**

3) a) $v_n = 1 - u_n$ donc $v_{n+1}=1-u_{n+1}=1-u_n(2-u_n)=1-2u_n+u_n^2=(1-u_n)^2=v_n^2$ **(0,5 point)**

   b) On a donc $v_1=v_0^2, v_2=v_1^2=v_0^4, v_3=v_2^2=v_0^8$. On peut penser que pour tout n : $v_n=v_0^{2^n}$.
   Prouvons ce résultat par récurrence : l'initialisation est immédiate. Pour l'hérédité, on suppose que, pour un certain n, $v_n=v_0^{2^n}$. On a alors $v_{n+1}=v_n^2=(v_0^{2^n})^2=v_0^{2\times 2^n}=v_0^{2^{n+1}}$ et la propriété est prouvée. **(0,5 point pour l'expression et 1 pour la preuve)**

   c) Quand n tend vers $+\infty$, 2^n tend vers $+\infty$, et, comme $0 < u_0 < 1$, on a aussi $0 < v_0 < 1$, donc $v_n=v_0^{2^n}$ tend vers 0. Il en résulte que u_n tend vers 1. **(1 point)**

Exercice 4)

1) Le capitaine consomme en un mois le quart de son stock. A la fin du mois il lui en reste les trois quarts $\left(\frac{3}{4}u_n\right)$, mais il achète 10 bouteilles. On a bien $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+10$.

   On a donc $u_1=160, u_2=130$. **(0,5 point)**

2) Si on pose $v_n=u_n-40, v_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+10-40=\frac{3}{4}u_n-30=\frac{3}{4}(u_n-40)=\frac{3}{4}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{3}{4}$. **(1 point)**

3) On a donc pour tout n $v_n=v_0\times\left(\frac{3}{4}\right)^n=160\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$, et $u_n=v_n+40=160\times\left(\frac{3}{4}\right)^n+40$. Comme $0<\frac{3}{4}<1$, la suite (u_n) tend vers 40. Ainsi, à terme le stock du capitaine sera de 40 bouteilles, et sa consommation mensuelle de 10 bouteilles. Elle sera inférieure à 12 quand le stock sera inférieur à 48, donc pour $v_n\le 8 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n\le\frac{8}{160}=\frac{1}{20}$.
   On obtient à la calculatrice qu'il lui faudra attendre $n = 11$. **(1,5 point)**